

1. ГЕОМЕТРИЯ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

1.1 Элементы земного эллипсоида

Земным эллипсоидом называется эллипсоид вращения, поверхность которого как по форме, так и по размерам достаточно близка к поверхности геоида. Поверхность земного эллипсоида образуется вращением эллипса вокруг его малой оси. Возьмем эллипс EPE_1P_1 (рис.1.1) и будем его вращать вокруг малой оси PP_1 . В результате получим эллипсоид вращения (рис.1.2).

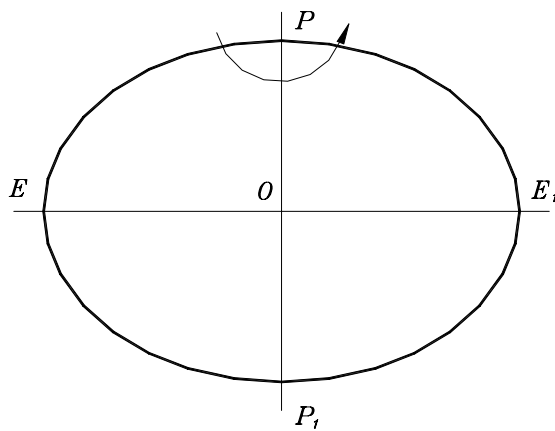


Рис.1.1

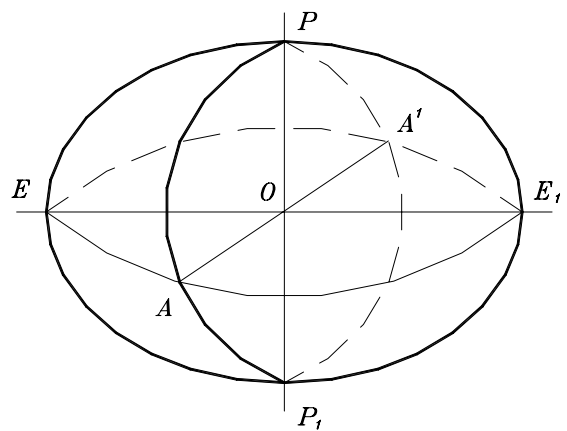


Рис.1.2

В качестве элементов земного эллипсоида, характеризующих его формы и размеры, в геодезии используют следующие величины:

$a=OE=OE_1=OA$ - экваториальная или большая полуось эллипсоида;

$b=OP=OP_1$ - полярная или малая полуось эллипсоида;

$\alpha = \frac{a-b}{a}$ - полярное сжатие эллипсоида;

$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ - первый эксцентриситет меридианного эллипса;

$e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$ - второй эксцентриситет меридианного эллипса.

Элементы эллипсоида связаны между собой простыми математическими зависимостями, позволяющими каждый из перечисленных элементов выразить в функции остальных:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{b}{1-\alpha} = \frac{b}{\sqrt{1-e^2}} = b\sqrt{1+e'^2}; \\ b &= a(1-\alpha) = a\sqrt{1-e^2} = \frac{a}{\sqrt{1+e'^2}}; \\ \alpha &= \frac{a-b}{a} = 1 - \sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}}; \\ e^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \alpha(2-\alpha) = \frac{e'^2}{1+e'^2}; \\ e'^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{\alpha(2-\alpha)}{(1-\alpha)^2} = \frac{e^2}{1-e^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Параметры a , b или a, α являются основными величинами, определяющими эллипсоид вращения; остальные - вспомогательными, применяемыми в вычислениях и теоретических выводах.

Для вывода численных значений земного эллипсоида используется большое количество геодезических, астрономических, гравиметрических и спутниковых измерений. В странах СНГ и в ряде других стран при выполнении геодезических и картографических работ используется эллипсоид Красовского. Значения исходных элементов этого эллипсоида, полученные в ЦНИИГАиК в 1940 году, равны:

$$a = 6\,378\,245.0 \text{ м},$$

$$\alpha = 1:298,3 = 0,0033523299.$$

Численные значения других элементов эллипсоида Красовского, вычисленные по исходным, приведены ниже

$$b = 6\,356\,863,0188 \text{ м};$$

$$e^2 = 0,0066934216;$$

$$e'^2 = 0,0067385254.$$

Ввиду малого полярного сжатия земной эллипсоид по форме близок к шару. Такие эллипсоиды с малым сжатием называют также **сфероидами**. Степень сжатия земного эллипсоида можно представить следующим образом. Если взять глобус радиусом 30 см, то приплюснутость данного эллипсоида сверху будет всего-навсего 1 мм.

1.2 Основные системы координат, применяемые в сфероидической геодезии

Система прямоугольных пространственных координат

За начало координат принимается центр эллипсоида, ось Z располагается по полярной оси эллипсоида, ось X - в плоскости, перпендикулярной оси вращения, ось Y дополняет систему координат до правой (рис.1.3).

Координаты точки M на эллипсоиде в этой системе следующие:

$$X = OM_1,$$

$$Y = OM_2,$$

$$Z = MM_1.$$

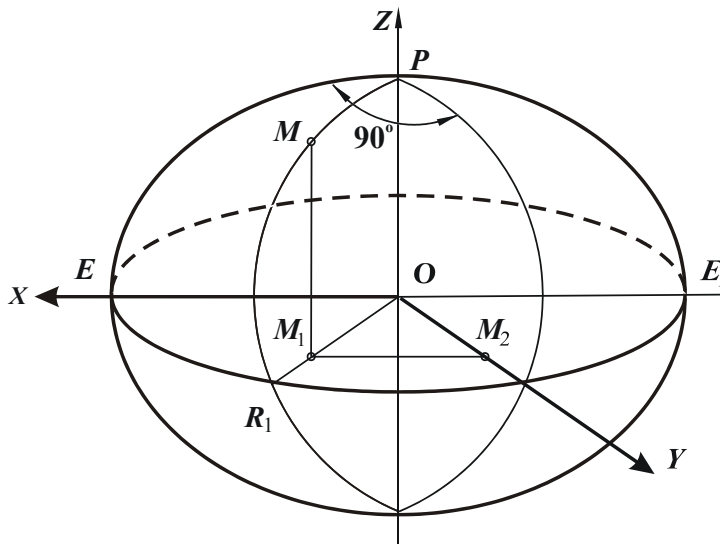


Рис.1.3

Пространственные координаты X, Y, Z до последнего времени имели небольшое применение как в теоретических выводах, так и в практических вычислениях. Однако в связи с широким внедрением в геодезическую практику спутниковых методов позиционирования данная система координат приобретает большое теоретическое и практическое значение.

Система геодезических координат

Плоскости, перпендикулярные оси вращения, в пересечении с поверхностью эллипсоида дают окружности. Эти окружности называются параллелями. Параллель с наибольшим радиусом $r=a$

называется **экватором** (рис.1.4).

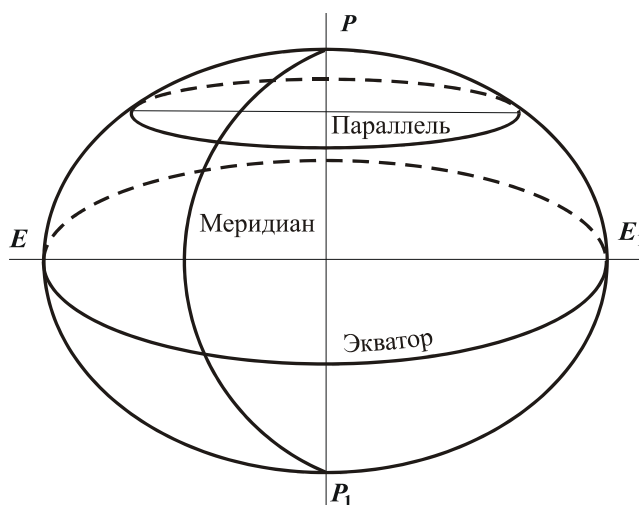


Рис.1.4

Пересекая поверхность эллипсоида плоскостями, содержащими ось вращения, получим в сечении совершенно одинаковые кривые - эллипсы. Половина каждого эллипса, расположенная между полюсами, называется **меридианом**.

Параллели и меридианы можно применять в качестве системы ортогональных линий на эллипсоиде, так как

каждая параллель пересекается с каждым меридианом под прямым углом, а их пересечение определяет положение единственной точки на поверхности эллипсоида.

В данной системе в качестве координат приняты угловые величины. Рассмотрим их.

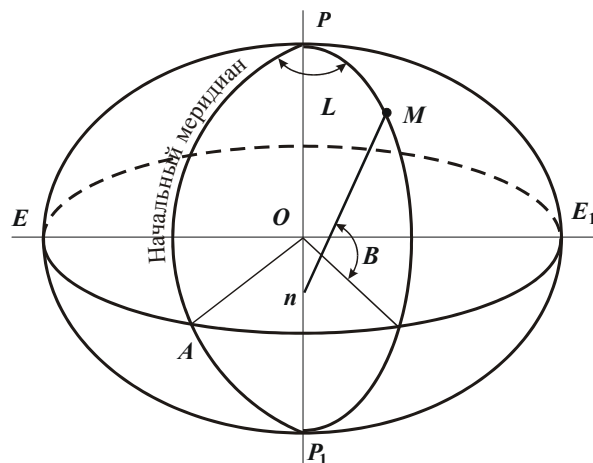


Рис.1.5

Примем один из меридианов за начальный (например, меридиан $PA P_1$, рис.1.5). Тогда положение любого другого меридиана будет определяться двугранным углом, составленным плоскостью начального меридиана и плоскостью данного меридиана. Этот угол имеет одну и ту же величину для всех точек данного меридиана, обозначается буквой L и является геодезической долготой.

Геодезической долготой L некоторой точки M называется двугранный угол, образованный плоскостью начального меридиана и плоскостью меридиана, проходящего через данную точку M .

В качестве начального меридиана для счета долгот в настоящее время повсеместно принят меридиан, проходящий через Гринвичскую обсерваторию, - Гринвичский меридиан. Долготы, отсчитываемые от плоскости начального меридиана к востоку (в северном полюсе - против движения часовой стрелки) в пределах от 0 до 180 называют восточными долготами, а к западу в пределах от 0 до -180 - западными долготами точки.

Таким образом, меридиан есть координатная линия, во всех точках которых геодезическая долгота имеет одну и ту же величину ($L = \text{const}$). Для установления второй координаты проведем нормаль к поверхности эллипсоида в точке M . Она пересечет ось вращения в точке n .

Острый угол, образованный нормалью к поверхности эллипсоида и плоскостью экватора (или плоскостью любой параллели) называется **геодезической широтой - B** .

Геодезическая широта отсчитывается от плоскости экватора до полюсов в пределах от 0 до 90. Для точек, расположенных в северном полусфереоиде, ее принято называть северной и считать положительной, а в южном полусфереоиде - соответственно южной и отрицательной.

Таким образом, параллель есть координатная линия, во всех точках которой широта имеет одну и ту же величину ($B = \text{const}$).

Система геодезических координат является единой для всей поверхности эллипсоида. В этом заключается одно из ее достоинств. Она используется при:

- обработке обширных геодезических сетей;
- решении задач, связанных с передачей координат на значительные расстояния;
- изучении фигуры и размеров Земли;
- наблюдении искусственных спутников Земли;
- составлении географических и топографических карт, в частности система геодезических координат положена в основу разграфки листов топографических карт, рамками которых служат меридианы и параллели.

Практическое значение геодезических координат состоит в том, что они незначительно отличаются от астрономических координат φ и λ , определяемых астрономическими методами независимо от геодезических измерений.

Вместе с тем, геодезические координаты относятся к математически правильной поверхности эллипсоида вращения. Их нельзя измерить, а можно только вычислить. Геодезические широту и долготу следует отличать от астрономических широты и долготы, которые относятся к уровенной поверхности и определяются непосредственно из измерений.

В дальнейшем при изучении вопросов сфероидической геодезии будут подразумеваться геодезические координаты.

Система прямоугольных сфероидических координат

Эта система координат на поверхности эллипсоида, т.е. координатные оси располагаются на поверхности эллипсоида. В зависимости от положения осей будем иметь различные системы координат, которые, оставаясь сфероидическими, будут иметь свои особенности. Рассмотрим одну из таких систем (рис.1.6).

Примем точку A с известными геодезическими координатами (B, L) за начало координат. Меридиан, проходящий через точку A примем за ось X . Для определения положения точки M проведем через нее нормальное сечение так, чтобы оно пересекло меридиан точки A под углом 90° .

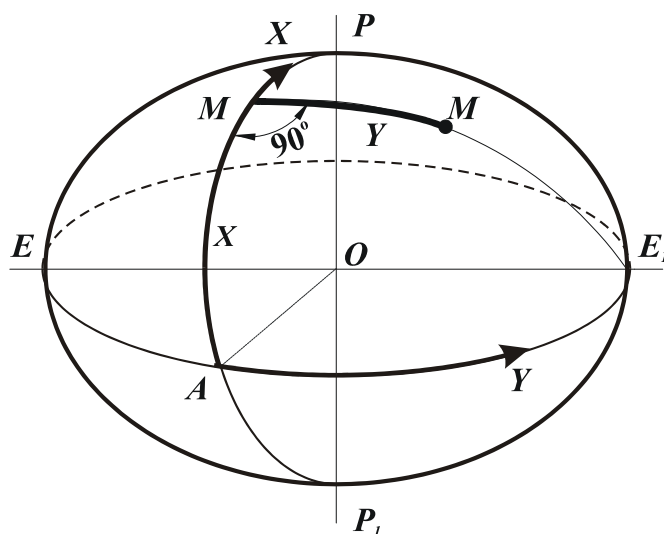


Рис.1.6

Тогда положение точки M определяется следующими координатами:

- сферической абсциссой X равной длине дуги $\cup AM_0$;

- сферической ординатой Y равной длине дуги $\cup MM_0$.

Данные координаты выражаются в

линейной мере, например, в километрах.

Система координат с приведенной широтой

Одной из координат в этой системе является геодезическая долгота L

Положение точки M в меридианном эллипсе, имеющем долготу L определяется приведенной широтой u , которая получается из следующего вспомогательного построения (рис.1.7).

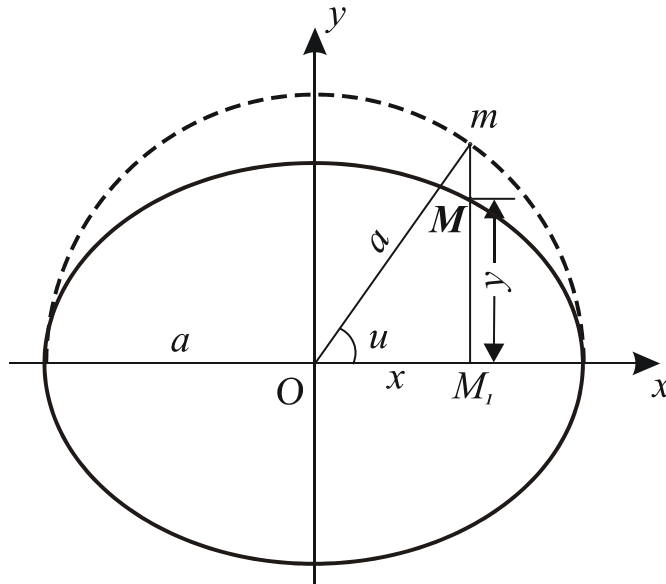


Рис.1.7

Опишем в плоскости меридианного эллипса PEP_1E_1 из точки O как из центра окружность радиусом OE , равным большой полуоси a . Продолжим ординату MM_1 до пересечения с построенной вспомогательной окружностью. Пусть они пересекутся в точке m . Соединим точку m с центром эллипса O ; угол mOE_1 и будет приведенной широтой u точки M .

Приведенная широта u применяется в ряде теоретических выводов.

Для вывода соотношения между широтами B и u возьмем прямоугольную систему координат xOy в плоскости меридианного эллипса и запишем уравнение эллипса в параметрической форме

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos u; \\ y &= b \cdot \sin u. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Проведем касательную MK к эллипсу в точке M (рис.1.8). Отрезок Mn является нормалью к поверхности эллипсоида (по определению геодезических координат) и, следовательно, $Mn \perp MK$. Тогда $\angle MKO = 90^\circ - B$.

Известно, что тангенс угла, образуемого касательной к кривой в данной точке с положительным направлением оси абсцисс, есть первая производная функции, описывающей кривую, $\frac{dy}{dx}$. Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(90^\circ + B) = -\operatorname{ctg} B. \quad (1.3)$$

Дифференцируя выражение (1.2) и подставляя значение дифференциалов

$$dx = -a \sin u du; \quad dy = b \cos u du$$

в формулу (1.3), получим

$$-\frac{b \cos u du}{a \sin u du} = -\operatorname{ctg} B,$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{a}{b} \operatorname{tg} u \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} u = \frac{b}{a} \operatorname{tg} B \quad (1.4)$$

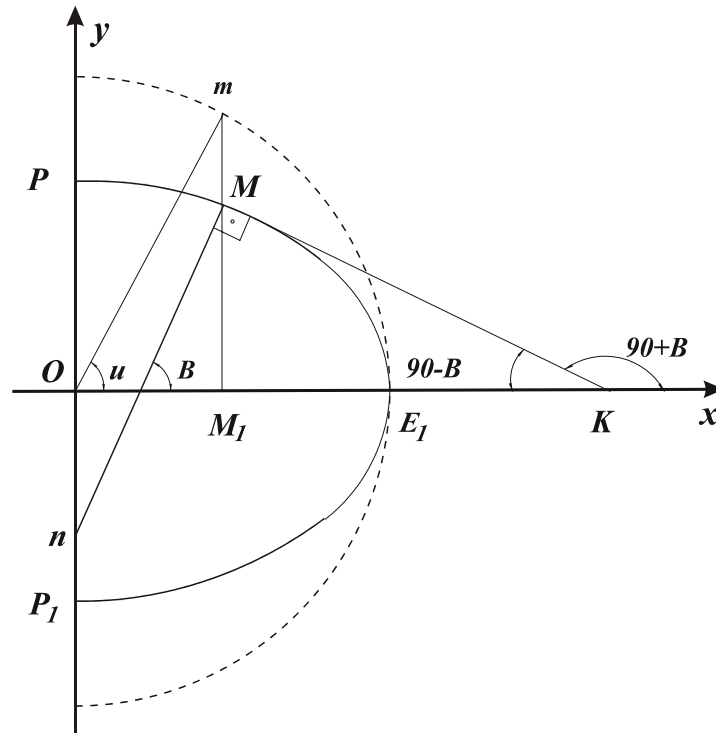


Рис.1.8

Ввиду того, что земной эллипсоид имеет малое полярное сжатие, широты B и u незначительно различаются между собой. Максимальная разность $(B - u) \approx 5,8'$ при $B=45^\circ$.

Координата x представляет собой радиус параллели. Поэтому на основании формулы (1.2) можно записать формулу для вычисления радиуса параллели

$$r = x = OM_1 = a \cos u \quad (1.5)$$

1.3 Основные сфероидические функции

Почти во всех формулах сфероидической геодезии присутствуют две величины, зависящие от эксцентриситета эллипсоида и широты. Они обозначаются W и V , называются первой и второй основными сфероидическими функциями и определяются следующими формулами

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \quad (1.6)$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}. \quad (1.7)$$

Эти функции связаны между собой следующим соотношением:

$$W = V\sqrt{1-e^2}. \quad (1.8)$$

Часто встречается еще одна вспомогательная функция эксцентриситета

$$\eta = e' \cos B \quad (1.9)$$

Она связана с функцией V такой зависимостью

$$V^2 = 1 + \eta^2. \quad (1.10)$$

1.4 Сечение эллипсоида плоскостями

При сечении эллипсоида плоскостями будем получать различные кривые разного радиуса.

Пусть на эллипсоиде задана точка A (рис.1.9). Прямая AN является нормалью к поверхности эллипсоида в точке A .

Все возможные сечения эллипсоида плоскостями, проведенными через точку A разделим на два класса:

- нормальные сечения;
- косые (наклонные) сечения.

Все сечения эллипсоида плоскостями, содержащими в себе нормаль AN , называются **нормальными сечениями** эллипсоида в точке A .

Из бесконечного множества выделяют два главных сечения, одно из которых имеет минимальный радиус кривизны, а другое - максимальный:

- **меридианное сечение**, содержащее нормаль AN и ось вращения PP_1 (сечение PAE_1P_1EQ на рис.1.9);
- **сечение первого вертикала**, плоскость которая содержит нормаль и перпендикулярна плоскости меридианного сечения (сечение KAU на рис.1.9).

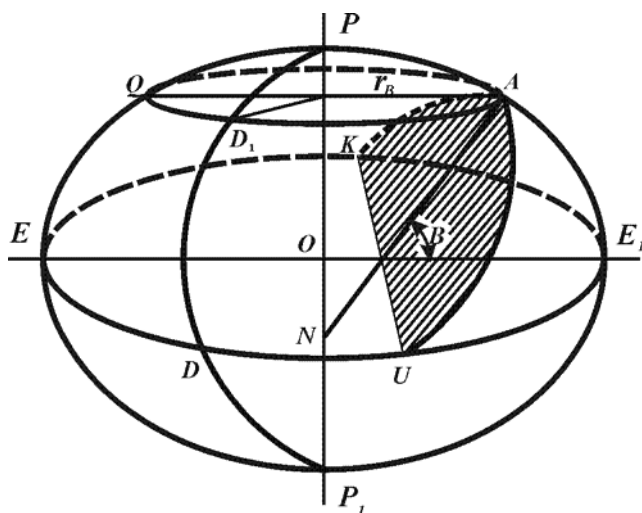


Рис.1.9

Радиусы кривизны главных нормальных сечений (**главные радиусы кривизны**) поверхности эллипсоида вращения имеют свои обозначения:

- M - радиус кривизны меридиана;
- N - радиус кривизны первого вертикала.

Все прочие сечения эллипсоида плоскостями проходящими через точку А, но не содержащими нормаль АN, называются косыми сечениями эллипсоида в точке А.

Одно из них AD_1Q (рис.1.9) является параллелью. Радиус параллели обычно обозначается r_B , где индекс обозначает широту параллели.

1.5 Радиус кривизны меридианного сечения

Получим выражение для радиуса кривизны меридиана M в зависимости от геодезической широты B и элементов земного эллипсоида.

На рис. 1.10 изображена часть меридианного эллипса, на котором выделен элемент дуги меридиана KD , равный dX и соответствующий бесконечно малому приращению широты dB . Точка C является центром кривизны элемента dX , так что отрезки DC и KC равны радиусу кривизны меридиана M . На основании известного определения радиуса кривизны любой кривой можно написать для M следующее выражение:

$$M = \frac{dX}{dB} \quad (1.11)$$

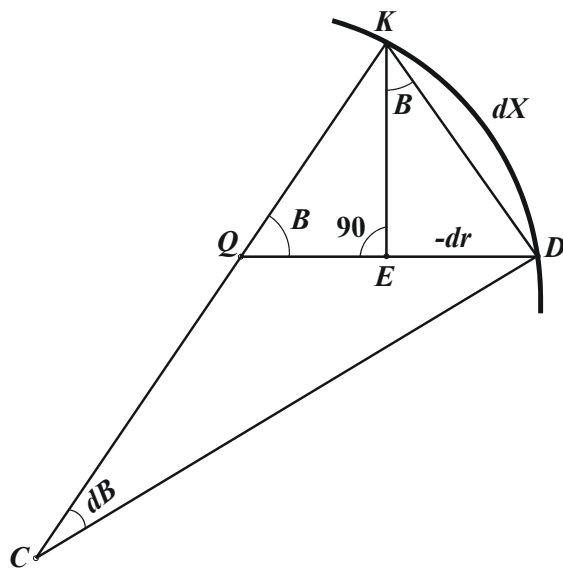


Рис.1.10

Проведя линию DE , параллельную плоскости экватора, и линию KE , ей перпендикулярную, получим прямоугольный треугольник KDE . В этом треугольнике угол при точке K равен широте, а катет DE - изменению радиуса параллели ($-dr$), соответствующему приращению широты dB (dr взято со знаком минус, т.к. с увеличением широты радиус параллели уменьшается). Из треугольника KDE получаем

$$dX = -\frac{dr}{\sin B}$$

и, следовательно

$$M = -\frac{dr}{dB} \frac{1}{\sin B} \quad (1.12)$$

Найдем дифференциал dr . Исходя из формул тригонометрии выразим косинус приведенной широты следующим образом

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}}.$$

Тогда согласно (1.4) можно записать

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 B}} = \frac{\cos B}{\sqrt{\cos^2 B + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 B}}.$$

Заменяя в последнем уравнении

$$\cos^2 B = 1 - \sin^2 B, \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2,$$

получим

$$\cos u = \frac{\cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}.$$

С учетом (1.5) можно записать выражение для радиуса кривизны параллели

$$r = a \cos u = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \cos B. \quad (1.13)$$

Перепишем последнее выражение следующим образом

$$r = a \cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2}.$$

Дифференцируя последнюю формулу (как дифференциал произведения), получим

$$dr = \left[-a \sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2} - \frac{1}{2} a \cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} (-e^2) 2 \sin B \cos B \right] dB$$

Вынесем общие члены за скобки

$$\frac{dr}{dB} = a \sin B \left((1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} \left[- (1 - e^2 \sin^2 B) + e^2 \cos^2 B \right] \right).$$

Вынося знак минус за квадратные скобки, получим

$$\frac{dr}{dB} = -a \sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} [1 - e^2 \sin^2 B - e^2 \cos^2 B].$$

Выражение в квадратных скобках можно преобразовать следующим образом

$$1 - e^2 \sin^2 B - e^2 \cos^2 B = 1 - e^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) = 1 - e^2.$$

Тогда

$$\frac{dr}{dB} = -a \sin B \left(1 - e^2 \sin^2 B\right)^{-3/2} (1 - e^2).$$

Окончательно можно записать

$$\frac{dr}{dB} = - \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B)^3}} \sin B.$$

Подставляя найденное значение производной в формулу (1.12), находим

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B)^3}}. \quad (1.14)$$

С учетом (1.6) можно записать

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3}. \quad (1.15)$$

Из формулы (1.14) ясно, что радиус кривизны M возрастает при изменении B от 0 до 90°.

Радиус кривизны меридианного эллипса в полюсах (при $B=90^\circ$) обозначим через c и будем называть **полярным радиусом кривизны**. Тогда

$$c = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2)^{3/2}} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a^2}{b} = \sqrt{1 - e'^2}. \quad (1.16)$$

Для эллипсоида Красовского полярный радиус равен 6 399 698,9018 м;

Если в формулу (1.15) подставить значение W из выражения (1.8) и выполнить преобразования с учетом (1.16), то получим еще одну формулу для вычисления радиуса меридианного сечения

$$M = \frac{c}{V^3} \quad (1.17)$$

1.6 Радиус кривизны сечения первого вертикала

Для выражения радиуса кривизны сечения первого вертикала воспользуемся рис. 1.11. На данном рисунке:

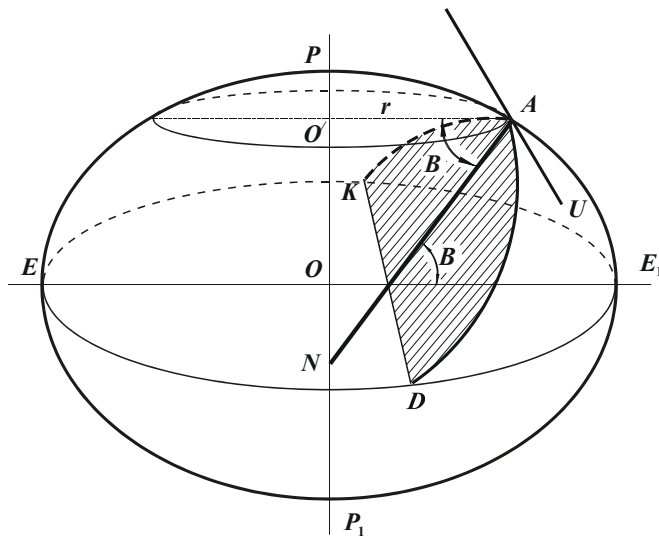


Рис.1.11

DAK - сечение первого вертикала;

SO'A - плоскость параллели (косое сечение).

Эти два сечения имеют общую касательную AU. Вывод радиуса кривизны сечения первого вертикала основан на теореме Менье, которая гласит:

Если через точку поверхности проведены два сечения - нормальное и наклонное, причем в рассматриваемой точке эти два сечения имеют общую касательную, то радиус кривизны наклонного сечения равен радиусу кривизны нормального сечения, умноженному на косинус угла между плоскостями этих сечений.

Следовательно,

$$r = N \cos B . \quad (1.18)$$

Тогда

$$N = \frac{r}{\cos B} ,$$

и с учетом (1.13)

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \quad (1.19)$$

или

$$N = \frac{a}{W} , \quad (1.20)$$

$$N = \frac{c}{V} . \quad (1.21)$$

Для ответа на вопрос, какой из двух радиусов M и N больше, на основании формул (1.21) и (1.17) образуем соотношение

$$\frac{N}{M} = V^2 ;$$

тогда с учетом (1.7) можем записать

$$\frac{N}{M} = 1 + e'^2 \cos^2 B.$$

Очевидно, что $N > M$ во всех точках поверхности эллипсоида, кроме полюсов.

На экваторе при $B=0^\circ$: $M = a(1 - e^2)$; $N = a$,

а на полюсе при $B=90^\circ$: $M = N = c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a^2}{b}$.

1.7 Линейный элемент поверхности

Через заданную точку на любой поверхности можно провести бесчисленное множество различных линий. Направление каждой линии в данной точке устанавливается углом между одной из координатных линий и данной линией, точнее, углом между касательными к этим линиям.

На поверхности земного эллипсоида в качестве направляющего угла принимается угол между касательными, проведенными к меридиану в северном направлении и к данной линии. Он отсчитывается от меридиана по ходу часовой стрелки, обозначается латинской буквой A и называется **геодезическим азимутом**.

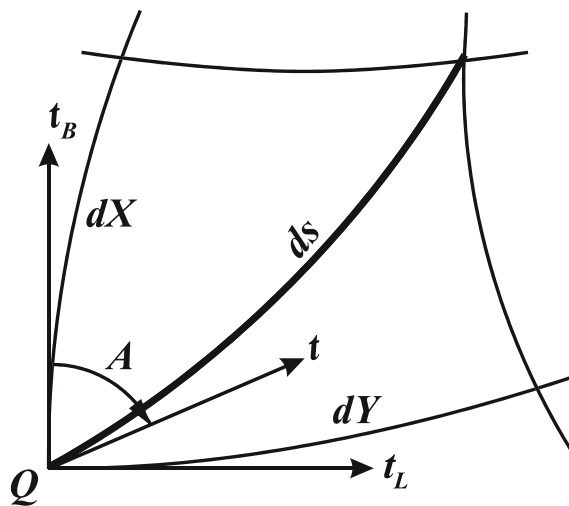


Рис.1.12

На рис. 1.12 в точке Q показаны

t_B - касательная к меридиану;

t_L - касательная к параллели;

t - касательная к произвольной кривой

ds .

Геодезический азимут можно определить как двугранный угол между плоскостью меридиана и нормальной плоскостью, проходящей через касательную к заданной линии.

Дифференциал дуги ds произвольной кривой называют **линейным элементом поверхности**.

Проектируя линейный элемент на координатные линии, с учетом формул (1.11) и (1.18) получаем дифференциалы дуг меридиана и параллели

$$ds \cos A = dX = M dB, \quad (1.22)$$

$$ds \sin A = dY = r dL = N \cos B dL. \quad (1.23)$$

Отсюда следует, что

$$ds^2 = M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dL^2. \quad (1.24)$$

Из равенств (1.22) и (1.23) можно найти следующие дифференциальные уравнения

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}, \quad (1.25)$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B}. \quad (1.26)$$

Эти уравнения показывают характер изменения широты и долготы при движении вдоль **любой линии** на поверхности эллипсоида.

1.8 Радиус кривизны произвольного нормального сечения

Связь между радиусом кривизны произвольного нормального сечения R и радиусами кривизны главных нормальных сечений M и N в любой точке поверхности эллипсоида устанавливает формула Эйлера

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{M} \cos^2 A + \frac{1}{N} \sin^2 A. \quad (1.27)$$

где A - геодезический азимут сечения, т.е. угол, составленный меридианным сечением и нормальным сечением, имеющим азимут A .

Из формулы (1.27) следует, что нормальные сечения, расположенные симметрично по отношению к главному нормальному сечению, имеют одинаковые радиусы кривизны. Действительно, при замене A в формуле (1.27) на $(360^\circ - A)$, $(180^\circ - A)$, $(180^\circ + A)$ значение R не изменяется.

Преобразуя выражение (1.27), получим формулу для вычисления радиуса кривизны произвольного нормального сечения с азимутом, равным A

$$R_A = \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A}. \quad (1.28)$$

Путем несложных преобразований данную формулу можно представить в другом виде, удобном для практического использования

$$R_A = \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 A}. \quad (1.29)$$

Для менее точных вычислений данная формула может быть преобразована

$$R_A = R \left(1 - \frac{1}{2} e'^2 \cos^2 B \cos 2A \right), \quad (1.30)$$

где R - средний радиус кривизны, который будет рассмотрен в следующем параграфе.

Формула (1.30) используется, например, при вычислении поправки за приведение измеренных базисных сторон к поверхности референц-эллипсоида.

1.9 Средний радиус кривизны

В геодезии встречается так называемый "средний радиус кривизны", который не относится ни к одной линии, ни к одному сечению на эллипсоиде, но используется как вспомогательная величина в некоторых теоретических и практических вопросах геодезии.

Средним радиусом кривизны в данной точке поверхности эллипсоида называется предел, к которому стремится среднее арифметическое из радиусов кривизны всех нормальных сечений, которые можно провести в данной точке, когда их число стремится к бесконечности.

Возьмем на эллипсоиде точку Q рис.(1.13) и через нее проведем меридиан QP , а затем различные нормальные сечения с азимутами A_1, A_2, A_3 и т.д. через ΔA до 2π , причем величина ΔA очень малая.

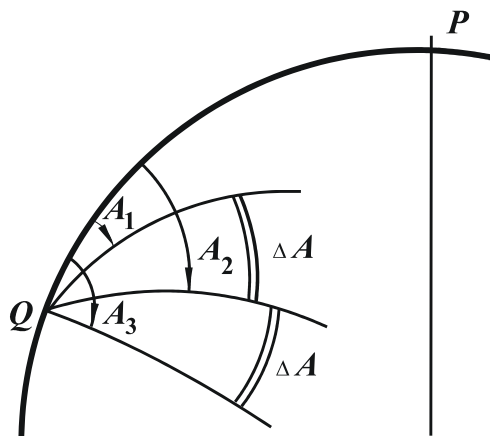


Рис.1.13

Радиусы кривизны этих сечений следующие: $M(A=0^\circ)$, $R_1(A=A_1)$, $R_2(A=A_2)$, ..., $N(A=90^\circ)$, ..., $R_i(A=A_i)$, ..., $M(A=180^\circ)$. Для каждого из сечений надо вычислить радиус и

взять среднее значение $R_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}$ при

$n \rightarrow \infty$. Так как симметрично расположенные сечения относительно главных направлений имеют одинаковые радиусы кривиз-

ны, то ограничимся сечениями в пределах от $A=0$ до $A=\pi/2$.

Приняв угол между соседними сечениями ΔA , находим общее число сечений

$$n = \frac{\pi}{2\Delta A}.$$

Тогда

$$R_{cp} = \frac{2}{\pi} \sum_{A=0}^{A=\pi/2} R_i \Delta A.$$

Следовательно при $\Delta A \rightarrow 0$

$$R_{cp} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} R_i dA.$$

Подставим значение R из формулы (1.28)

$$R_{cp} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A} dA.$$

Взяв интеграл и подставив пределы интегрирования, получим окончательные формулы для вычисления среднего радиуса кривизны

$$R = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2} = \frac{b}{W^2}. \quad (1.31)$$

Средний радиус кривизны R используется при решении некоторых задач математической картографии и в тех случаях, когда сфероидичностью земли можно пренебречь, приняв для вычислений шар радиусом R .

Средний радиус кривизны во всех точках, за исключением полюсов, меньше N и больше M , т. е. $M < R < N$. На полюсах $R = M = N = c$.

1.10 Вычисление длины дуги параллели

Параллель на эллипсоиде вращения является окружностью, поэтому вычисление дуги параллели не представляет особой сложности и сводится к определению дуги окружности с центральным углом, равным разности долгот конечных точек дуги. Радиус параллели r определяется по формулам (1.13) и (1.18)

$$r = N \cos B = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{a \cos B}{W}.$$

Длина дуги параллели ΔY , имеющей широту B и разность долгот конечных точек дуги l , очевидно, определится формулой

$$\Delta Y = N \cos B \frac{l''}{\rho''}. \quad (1.32)$$

Можно решить и обратную задачу, т.е. зная расстояние между точками, расположенными на одной параллели с широтой B , найти разность долгот

$$l'' = \frac{\Delta Y}{N} \sec B \rho'' . \quad (1.33)$$

1.11 Вычисление длины дуги меридиана

Сложнее обстоит дело с вычислением длины дуги меридиана, т.к. сечение меридиана представляет собой эллипс, радиус кривизны которого постоянно изменяется.

Возьмем на меридианном эллипсе две точки Q_1 и Q_2 соответственно с широтами B_1 и B_2 на бесконечно малом расстоянии dX (рис.1.14.). В этом случае дугу dX можно рассматривать как дугу окружности радиуса M

$$dX = (B_2 - B_1)M = M dB . \quad (1.34)$$

Длина дуги меридиана между конечными точками, имеющими широты B_1 и B_2 , определится следующим интегралом

$$\Delta X = \int_{B_1}^{B_2} \frac{a(1-e^2)dB}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 B)^3}} = a(1-e^2) \int_{B_1}^{B_2} (1-e^2 \sin^2 B)^{-3/2} dB . \quad (1.35)$$

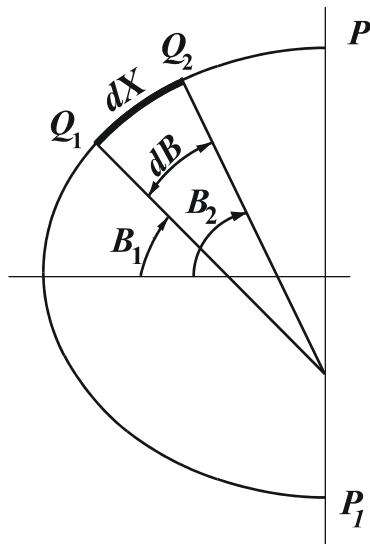


Рис.1.14

Этот интеграл является эллиптическим и в элементарных функциях не берется. Для его нахождения используют 2 способа:

1. Раскладывают подынтегральную функцию в степенной ряд, ограничиваясь определенным числом членов разложения, и выполняют почленное интегрирование, которое, таким образом сводится к интегрированию в элементарных функциях.

2. Применяют численное интегрирование методами, известными в вычислительной математике.

1 способ.

Разложение подынтегральной функции в быстросходящийся ряд позволяет получить общую формулу для вычисления дуги меридиана

$$\Delta X = a(1 - e^2) \left[a_0(B_2 - B_1) - \frac{a_2}{2}(\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + \frac{a_4}{4}(\sin 4B_2 - \sin 4B_1) - \frac{a_6}{6}(\sin 6B_2 - \sin 6B_1) + \dots \right], \quad (1.36)$$

где $(B_2 - B_1)$ - разность широт выраженная в радианах,

$$a_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \dots;$$

$$a_2 = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \dots;$$

$$a_4 = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \dots;$$

$$a_6 = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \dots$$

Формула (1.36), как уже отмечалось, является общей для дуги меридиана. Она может быть преобразована в зависимости от ее назначения и от длины дуги меридиана.

1. Если принять $B_1=0$, то получим формулу для длины дуги меридиана от экватора до точки с заданной широтой B

$$X = a(1 - e^2) \left[a_0 \frac{B''}{\rho''} - \frac{a_2}{2} \sin 2B + \frac{a_4}{4} \sin 4B - \frac{a_6}{6} \sin 6B + \dots \right]. \quad (1.37)$$

Эта формула используется для вычисления плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса-Крюгера по заданным геодезическим координатам.

2. Для вычисления длин дуг меридианов протяженностью до 400 километров с точностью до одного миллиметра в формуле (1.36) достаточно удерживать слагаемые, содержащие множитель e^2 , и тогда получим следующую формулу

$$\Delta X = M_m \frac{(B_2 - B_1)}{\rho} \left[1 + \frac{(B_2 - B_1)^2}{8\rho^2} e^2 \cos 2B_m \right], \quad (1.38)$$

где M_m -вычисляется по средней широте $B_m = (B_1 + B_2)/2$.

3. Для вычислений в триангуляции, когда стороны незначительны и редко превышают 40-50 километров, приведем более простую и удобную формулу

$$\Delta X = M_m \frac{(B_2 - B_1)}{\rho}. \quad (1.39)$$

Следовательно, при длине дуги менее 45 км ее можно рассматривать как сферическую с центральным углом, равным разности широт конечных точек, и

описанную радиусом меридианного сечения, соответствующим средней широте дуги.

Нахождение широты B по заданной длине дуги меридиана от экватора является обратной задачей. Из формулы (1.37) может быть записана следующая формула для определения широты B_X по заданной длине дуги меридиана произвольной длины X

$$B_X = \frac{1}{a_0} \left[\frac{X}{a(1-e^2)} + \left(\frac{a_2}{2} \sin 2B_X - \frac{a_4}{4} \sin 4B_X + \frac{a_6}{6} \sin 6B_X \right) \right] \quad (1.40)$$

Вычисление широты производят методом последовательных приближений, принимая в первом приближении

$$B_X^I = \frac{X}{a_0 a (1-e^2)}$$

Последующие приближения выражаются следующими формулами:

$$B_X^{II} = B_X^I + \frac{1}{2} \frac{a_2}{a_0} \sin 2B_X^I - \frac{1}{4} \frac{a_4}{a_0} \sin 4B_X^I;$$

$$B_X^{III} = B_X^I + \frac{1}{2} \frac{a_2}{a_0} \sin 2B_X^{II} - \frac{1}{4} \frac{a_4}{a_0} \sin 4B_X^{II} + \frac{1}{6} \frac{a_6}{a_0} \sin 6B_X^{II};$$

$$B_X^{IV} = B_X^I + \frac{1}{2} \frac{a_2}{a_0} \sin 2B_X^{III} - \frac{1}{4} \frac{a_4}{a_0} \sin 4B_X^{III} + \frac{1}{6} \frac{a_6}{a_0} \sin 6B_X^{III}.$$

Окончательное значение выражается следующей формулой

$$B_X = B_X^I + \frac{1}{2} \frac{a_2}{a_0} \sin 2B_X^{IV} - \frac{1}{4} \frac{a_4}{a_0} \sin 4B_X^{IV} + \frac{1}{6} \frac{a_6}{a_0} \sin 6B_X^{IV}.$$

2 способ.

При численном интегрировании удобно использовать наиболее простую и достаточно точную формулу Симпсона (формулу парабол). Разделим интервал интегрирования на 2 равные части. Тогда можно записать

$$\Delta X = \frac{\Delta B}{6} (M_1 + 4M_m + M_2). \quad (1.41)$$

В данной формуле радиус кривизны M определяется в трех точках искомой дуги меридиана: в начальной, конечной и средней, соответственно по широтам

B_1, B_2, B_m . При расстояниях между точками до 500 километров формула (1.41) обеспечивает точность вычислений 1-2 см.

Для контроля и повышения точности длину дуги меридиана можно вычис-

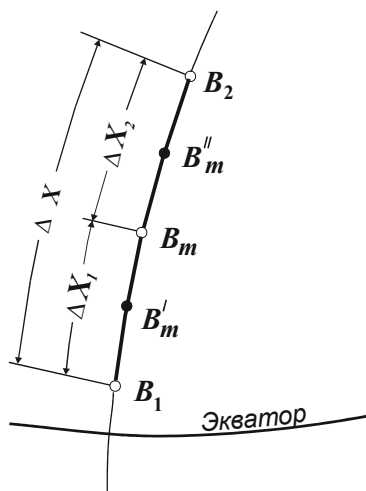


Рис.1.15

лить как сумму нескольких дуг. На рис.1.15. показано нахождение дуги меридиана между точками с широтами B_1 и B_2 как сумму двух дуг ΔX_1 и ΔX_2 :

$$\Delta X = \Delta X_1 + \Delta X_2;$$

$$\Delta X_1 = \frac{(B_m - B_1)''}{6\rho''} (M_m + 4M'_m + M_1);$$

$$\Delta X_2 = \frac{(B_2 - B_m)''}{6\rho''} (M_2 + 4M''_m + M_m).$$

1.12 Вычисление площадей съемочных трапеций

Съемочные трапеции являются частью поверхности земного эллипсоида. Они ограничиваются линиями меридианов и параллелей. Вычисление площадей съемочных трапеций или листов карт сводится к вычислению площадей сфероидических трапеций.

Возьмем на эллипсоиде бесконечно малую трапецию ABCD (рис.1.16). Стороны этой трапеции являются элементами дуг меридианов и параллелей

$$AB = CD = M dB;$$

$$AD = BC = rdL = N \cos B dL;$$

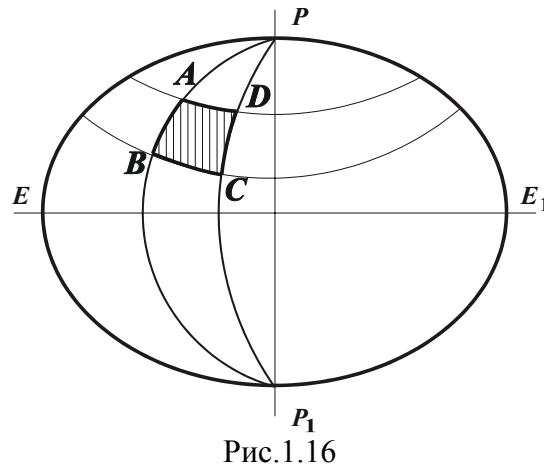


Рис.1.16

Площадь данной элементарной трапеции выразится формулой

$$dP = MN \cos B dL dB .$$

Учитывая, что в соответствии с формулой (1.31) $MN = R^2 = \frac{b^2}{W^4}$, запишем

$$dP = \frac{b^2 \cos B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2} dB dL .$$

Площадь конечной трапеции, ограниченной широтами B_1 и B_2 и долготами L_1 и L_2 , выразится двойным интегралом

$$P = b^2 \int_{L_1}^{L_2} \int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B dB dL .$$

Интегрируя по dL , получаем

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B dB . \quad (1.42)$$

Оставшийся интеграл в формуле (1.42) является эллиптическим и, как известно, в элементарных функциях не берется. Для его вычисления разложим подынтегральную функцию в ряд по биному Ньютона

$$(1 - z)^{-2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots;$$

$$(1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} = 1 + 2e^2 \sin^2 B + 3e^4 \sin^4 B + 4e^6 \sin^6 B + \dots$$

Подставим полученное выражение в формулу (1.42)

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} (\cos B + 2e^2 \sin^2 B \cos B + 3e^4 \sin^4 B \cos B + 4e^6 \sin^6 B \cos B + \dots) dB$$

Отсюда, выполняя почленное интегрирование, получим

$$P = b^2(L_2 - L_1) \left[\sin B + \frac{2}{3}e^2 \sin^3 B + \frac{3}{5}e^4 \sin^5 B + \frac{4}{7}e^6 \sin^7 B + \dots \right]_{B_1}^{B_2}.$$

Подставляя пределы интегрирования, окончательно имеем

$$P = b^2(L_2 - L_1) \left[(\sin B_2 - \sin B_1) + \frac{2}{3}e^2(\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1) + \right. \\ \left. + \frac{3}{5}e^4(\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1) + \frac{4}{7}e^6(\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1) + \dots \right]. \quad (1.43)$$

Применяя данную формулу, подсчитаем площадь половины эллипсоида, то есть при $B_1=0^\circ$, $B_2=90^\circ$, $L_2-L_1=2\pi$, $\sin 0^\circ=0$; $\sin 90^\circ=1$

$$P = 2\pi b^2 \left[1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots \right]. \quad (1.44)$$

Площадь всего эллипсоида будет в 2 раза больше, т.е.

$$P = 4\pi b^2 \left[1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots \right] \quad (1.45)$$

Площадь поверхности эллипсоида Красовского составляет 510 083 035 квадратных километра. Радиус шара, площадь которого равна площади эллипсоида Красовского, равен 6 371 116 метра, а радиус шара, равновеликого по объему эллипсоиду Красовского равен 6 371 110 метров. Следовательно, при приближенных вычислениях, когда Землю можно принимать за шар, его радиус следует брать равным 6371 километр.

1.13 Расчет рамок съёмочных трапеций

Западная и восточная рамки съёмочной трапеции ABCD (рис.1.17.) представляют собой дуги меридианов между широтами B_1 и B_2 . Поэтому

$$AB = CD = \Delta X.$$

Учитывая, что ΔX величина относительно небольшая (даже для карт масштаба 1:1 000 000 разность широт $B_2-B_1=4^\circ$, а $\Delta X \approx 444$ км) и не требуется высокая точность вычислений, длину дуги меридиана можно определить по формуле (1.39)

$$AB = CD = (B_2 - B_1)'' \frac{M_m}{\rho''} = \Delta B'' \frac{M_m}{\rho''}, \quad (1.46)$$

где M_m - радиус меридианной кривой, взятый по средней широте.

Северная и южная рамки являются дугами параллелей, имеющих соответственно широты B_1 и B_2 . Поэтому в соответствии с формулой (1.32) запишем

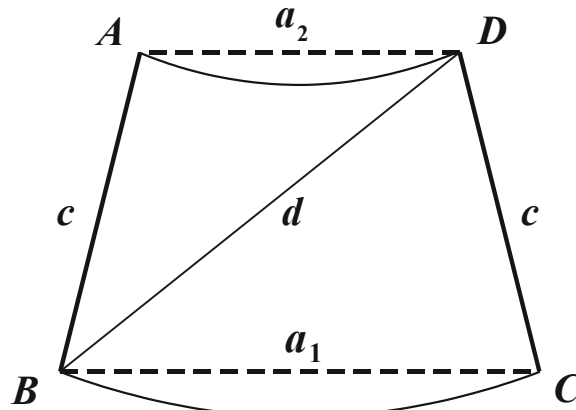


Рис.1.17

$$\left. \begin{aligned} AD &= \frac{r_{B_2} \Delta L''}{\rho''} = \frac{N_2 \cos B_2 \Delta L''}{\rho''}, \\ BC &= \frac{r_{B_1} \Delta L''}{\rho''} = \frac{N_1 \cos B_1 \Delta L''}{\rho''} \end{aligned} \right\}. \quad (1.47)$$

Для получения размеров рамок в заданном масштабе необходимо найденные величины разделить на знаменатель масштаба m , а для получения размеров сторон трапеции в сантиметрах умножить на 100. Поэтому окончательно будем иметь

$$\left. \begin{aligned} c = AB = CD &= \frac{100}{m} \Delta B'' \frac{M_m}{\rho''}, \\ a_1 = BC &= \frac{100}{m} \frac{N_1 \cos B_1 \Delta L''}{\rho''}, \\ a_2 = AD &= \frac{100}{m} \frac{N_2 \cos B_2 \Delta L''}{\rho''} \end{aligned} \right\}. \quad (1.48)$$

Существуют специальные таблицы, из которых размеры рамок и площади трапеций различных масштабов можно выбрать по аргументу широты, например, "Таблицы координат Гаусса-Крюгера и таблицы размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок", Москва, Геодизиздат, 1948 год. В них приводятся стороны трапеций a_1 , a_2 , c и диагональ d , выраженные в сантиметрах. Диагональ приведена для контроля, который осуществляется по формуле

$$d = \sqrt{a_1 a_2 + c^2}.$$

2. КРИВЫЕ НА ЭЛЛИПСОИДЕ ВРАЩЕНИЯ

2.1 Взаимные нормальные сечения

Для объяснения сущности взаимных нормальных сечений докажем вначале, что нормали к поверхности эллипсоида, проведенные из точек с разными широтами пересекаются с осью PP_1 в разных точках.

Возьмем на поверхности эллипсоида две точки A и B с широтами соответственно B_1 и B_2 (рис.2.1). Пусть $B_2 > B_1$. Проведем нормали к поверхности эллипсоида в точках A и B . Обе нормали лежат в плоскостях меридианных эллипсов,

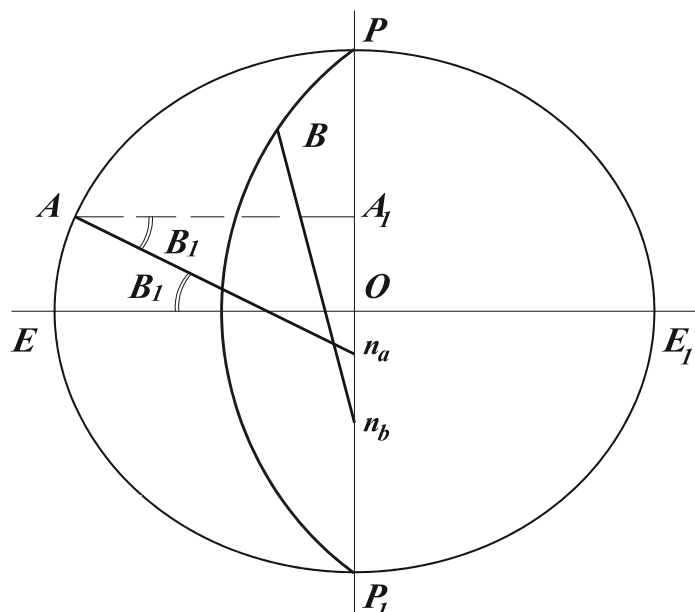


Рис.2.1

проходящих через точки A и B и пересекают малую ось PP_1 соответственно в точках n_a и n_b .

Опустим из точки A перпендикуляр AA_1 на малую полуось PP_1 . Тогда в системе координат меридианного эллипса, проходящего через точку A , отрезок OA_1 , есть не что иное, как ордината y точки A .

Согласно параметрических уравнений эллипса (1.2)

$$y = OA_1 = b \sin u.$$

Преобразуем данное выражение с учетом следующих соотношений

$$b = a\sqrt{1-e^2};$$

$$\sin u = \frac{\sin B}{V};$$

$$W = V\sqrt{1-e^2}.$$

Тогда

$$OA_1 = a\sqrt{1-e^2} \frac{\sin B_1}{V_1} = \frac{a}{W_1}(1-e^2)\sin B_1 = \frac{a(1-e^2)\sin B_1}{\sqrt{1-e^2}\sin^2 B_1}. \quad (2.1)$$

Отрезок A_1n_a определим из прямоугольного треугольника AA_1n_a

$$A_1n_a = An_a \sin B_1.$$

Учитывая, что A_1n_a является радиусом кривизны первого вертикала в точке A , можно записать

$$A_1 n_a = N_1 \sin B_1 = \frac{a \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}}. \quad (2.2)$$

Расстояние от центра эллипсоида до пересечения нормали с малой полуосью выражается так

$$On_a = A_1 n_a - OA_1 = \frac{a \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} - \frac{a(1 - e^2) \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}},$$

$$On_a = \frac{ae^2 \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}}. \quad (2.3)$$

Аналогично для точки В будем иметь

$$On_b = \frac{ae^2 \sin B_2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}}. \quad (2.4)$$

Так как по условию $B_2 > B_1$, то $On_b > On_a$, т.е. нормаль к поверхности эллипсоида, проведенная в точке, имеющей меньшую широту, пересекает малую ось ближе к центру.

Таким образом, рассматриваемые нормали An_a и Bn_b представляют собой две скрещивающиеся в пространстве, но не пересекающиеся прямые (они пересекаются в одной точке, если точки А и В лежат в одном меридиане или в разных меридианах, но имеют одинаковые широты).

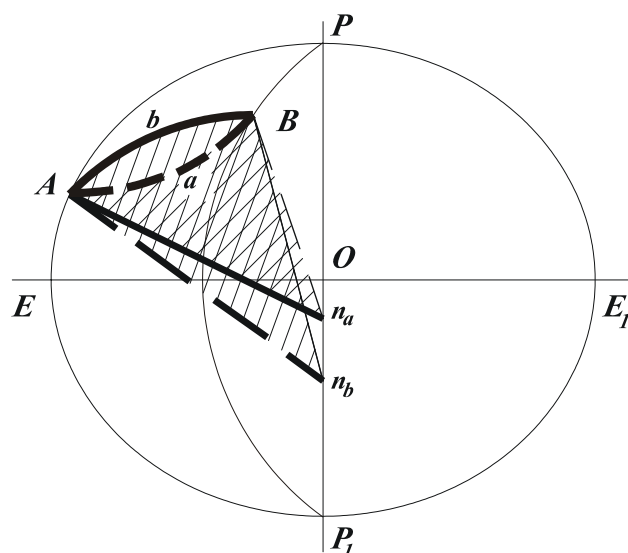


Рис.2.2

Проведем плоскость через точки А, n_a и В (рис.2.2). Очевидно, эта плоскость, в которой лежит нормаль An_a , будет нормальной плоскостью в точке А и проходящей через точку В. В пересечении с поверхностью эллипсоида она даст кривую АаВ, которая называется прямым нормальным сечением в точке А на точку В.

Проведем теперь плоскость через точки В, n_b , А. Она является плоскостью нормального сечения в точке В, которое проходит также через точку А. Эта плоскость пересечет поверхность эллипсоида по кривой ВbА, которая не совпадает с кривой АаВ.

Эти две кривые АаВ и ВbА называются взаимно обратными нормальными сечениями.

Следовательно, между двумя точками А и В на эллипсоиде проходят два нормальных сечения:

- АаВ, которое называется прямым нормальным сечением для точки А и обратным нормальным сечением для точки В;

- ВbА, которое будет прямым нормальным сечением для точки В и обратным для точки А.

Плоскости нормальных сечений имеют важное значение для угловых измерений.

Представим, что в точке А установлен теодолит так, что его вертикальная ось совпадает с нормалью An_a . Тогда при наведении трубы на точку В визирная плоскость совпадает с плоскостью прямого нормального сечения и на поверхности эллипсоида даст кривую АаВ. При визировании с точки В на точку А визирная плоскость пересечет поверхность эллипсоида по кривой ВbА, которая, как установлено ранее, не совпадает с кривой АаВ.

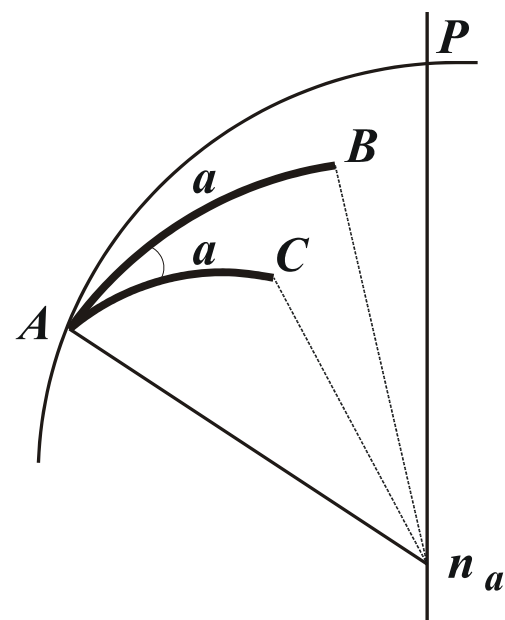


Рис.2.3

Пусть в точке А при помощи теодолита кроме точки В наблюдалась еще точка С (рис. 2.3). В этом случае визирная плоскость пересечет поверхность эллипсоида по кривой АаС, которая является прямым нормальным сечением в точке А на точку С.

Измеренный горизонтальный угол в точке А является мерой двугранного угла, образованного нормальными плоскостями в точке А и проходящими через точки В и С. На поверхности эллипсоида этому углу соответствует угол между прямыми нормальными сечениями в точке А на точки В и С. Следовательно, измеряемые в триангуляции углы

треугольников на эллипсоиде являются углами между прямыми нормальными сечениями в данной точке.

Возьмем на поверхности эллипсоида треугольник триангуляции АВС, в котором измерены все углы (рис.2.4). Измеренные углы между плоскостями прямых нормальных сечений показаны дугами. Вследствие двойственности взаимных нормальных сечений измеренные горизонтальные углы не образуют на поверхности эллипсоида замкнутый треугольник.

Угловое расхождение нормальных сечений определяется следующей приближенной формулой

$$\Delta'' = \frac{\rho''}{4} \frac{s^2}{N_m^2} e^2 \cos^2 B_m \sin 2A, \quad (2.5)$$

где: s - длина кривой нормального сечения;

N_m - радиус кривизны первого вертикала в середине нормального сечения;

B_m - средняя широта нормального сечения;

A - азимут прямого нормального сечения.

Максимальной величины Δ достигает при $B_m=0^\circ$ и $A=45^\circ$ и для различных расстояний будет иметь следующие значения:

$s, \text{км}$	$\Delta, \text{сек}$
200	0,339
100	0,085
50	0,021

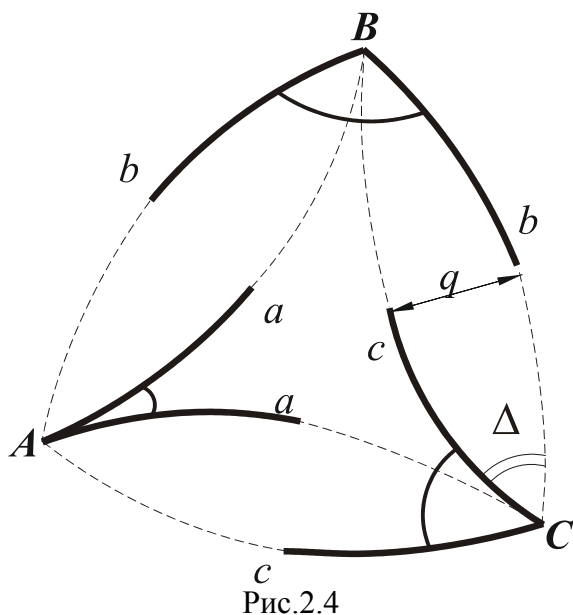
Максимальное линейное расхождение между нормальными сечениями выражается формулой:

$$q = \frac{1}{4} s \Delta. \quad (2.6)$$

При $S=100\text{км}$ и $B=A=45$ получим $q=0.006\text{м}$.

Несмотря на весьма малое угловое и линейное расхождение, все же использование нормальных сечений вследствие их двойственности создает неудобства при производстве геодезических вычислений.

Чтобы избежать неопределенности в построении треугольников на эллипсоиде, необходимо использовать кривые линии, построение которых выполняется однозначно. Такими кривыми на поверхности эллипсоида являются геодезические линии.



2.2 Понятие о геодезической линии

Геодезическая линия есть линия кратчайшего расстояния между точками по поверхности земного эллипсоида.

На эллипсоиде она играет такую же роль, как прямая на плоскости или дуга большого круга на сфере.

Из определения геодезической линии как кратчайшей кривой между двумя точками на поверхности земного эллипсоида, следует и иное определение: **геодезическая линия на поверхности - такая кривая, в каждой точке которой соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль к поверхности в этой точке** (рис.2.5) .

Соприкасающаяся плоскость - это предельное положение плоскости, проходящей через 3 ближайшие точки кривой M, N, P, когда N стремится к M, и P - к M. Соприкасающаяся плоскость содержит в себе касательную к данной кривой.

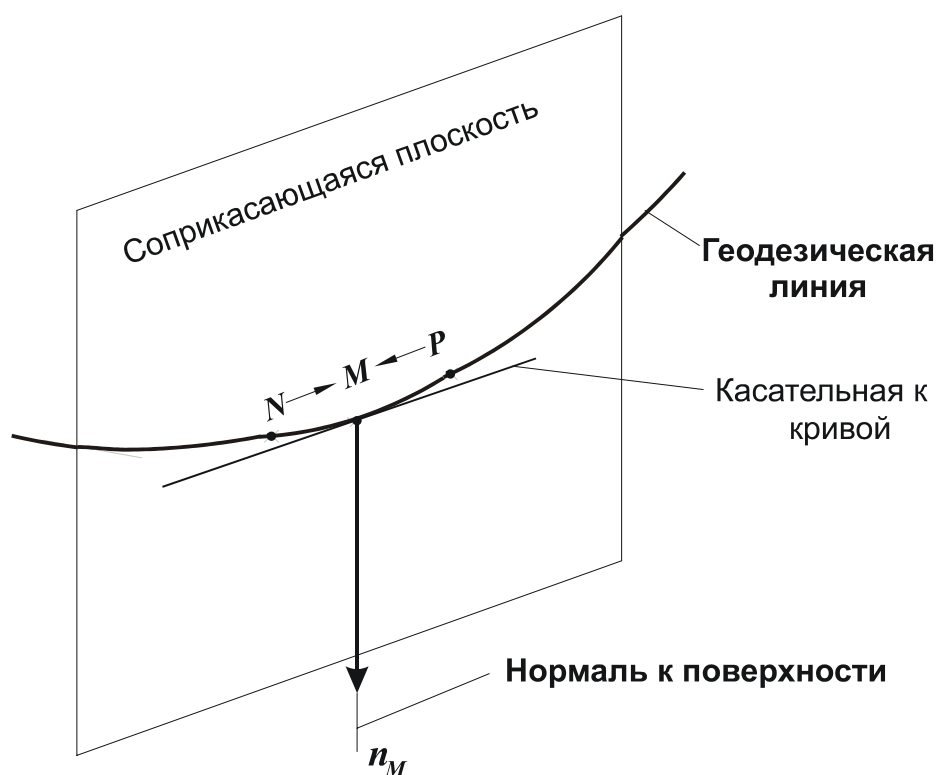


Рис.2.5

Из этих определений можно представить следующий способ построения геодезической линии. Установим в точке Q теодолит так, чтобы его вертикальная ось совпадала с нормалью Qn_1 к поверхности эллипсоида в точке Q (рис.2.6). В заданном направлении отметим на поверхности эллипсоида точку a, близкую к Q. Перенесем теодолит в точку a и установим так, чтобы его вертикальная ось совпала с нормалью an_2 , наведем трубу на точку Q и, повернув алидаду на 180° , отметим на поверхности эллипсоида точку b, близкую к a. Затем установим теодолит в точке b так, чтобы его вертикальная ось совпала с нормалью bn_3 , и наведем трубу на точку a, переведем алидаду на 180° и отметим точку c, близкую к b и т.д. до тех пор пока не подойдем к нужной точке.

Предполагая, что точки Q,a,b,c отмечались на бесконечно близких расстояниях, получим на эллипсоиде **геодезическую линию**. Действительно, плоскость

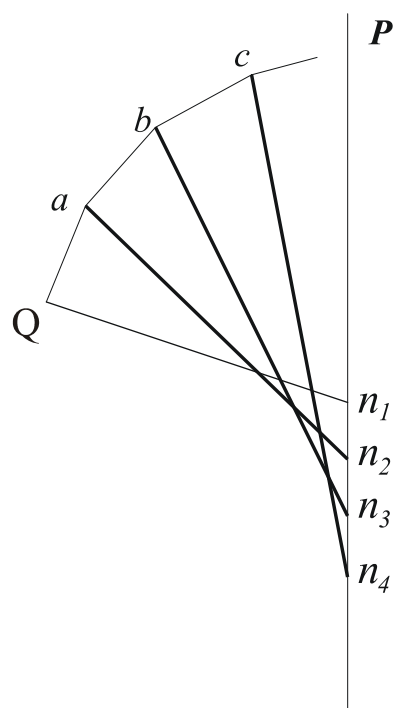


Рис.2.6

$Qabn_2$ является соприкасающейся в точке a . В этой плоскости лежат отрезки aQ и ab , которые можно рассматривать как касательные в точке a ; в этой же плоскости лежит нормаль an_2 . То же самое будет иметь место в точках b, c, d и т.д. Следовательно, условия, определяющие геодезическую линию, соблюдены, т.е. нормаль к поверхности лежит в соприкасающейся плоскости в каждой точке кривой. Нормали Qn_1 , an_2 , bn_3 и т.д. пересекают малую полуось в разных точках, поэтому плоскости $Qabn_2$, $abcn_3$, $bcdn_4$ не совпадут между собой и точки Q, a, b, c, d дадут на поверхности эллипсоида непрерывную линию двойкой кривизны.

Если конечные точки не лежат на одном меридиане или на одной параллели, геодезическая линия располагается между нормальными сечениями, как показано на рис.2.7. Геодезическая линия в начале своего пути от точки A к точке B располагается ближе к прямому сечению AaB , находясь на $1/3$ расхождения между взаимными нормальными сечениями в точке A ; по мере продвижения к точке B геодезическая линия приближается к обратному сечению и на равном расстоянии между A и B располагается посередине между обоими нормальными сечениями; в точке B она снова делит угол между взаимными нормальными сечениями в отношении $1:3$, но находится уже ближе к сечению BbA .

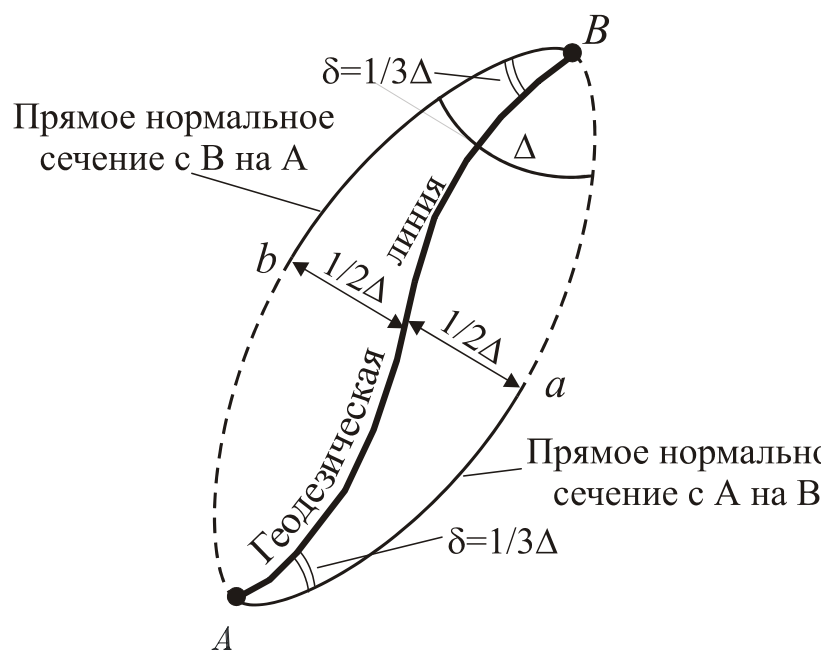


Рис.2.7

Следовательно

$$\delta'' = \frac{1}{3} \Delta'' = \frac{\rho''}{12} \frac{s^2}{N_m^2} e^2 \cos^2 B_m \sin 2A. \quad (2.7)$$

Из формулы (2.7) вытекает, что наибольшее абсолютное значение δ будет при азимутах, равных $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$.

При $B_m = 0^\circ$ и $A = 45^\circ$ значения δ равны

S, км	δ , сек
200	0.113
100	0.028
50	0.007

Из приведенных величин ясно, что расхождениями между геодезической линией и прямым нормальным сечением во многих случаях можно пренебречь.

При азимуте A , равном 0° или 180° , когда конечные точки геодезической линии лежат на одном меридиане, геодезическая линия совпадает с нормальным сечением, и значение δ будет равно нулю.

Когда две точки лежат на одной параллели и азимут близок к 90° или 270° , нормальные сечения совпадают между собой, а геодезическая линия располагается несколько севернее нормальных сечений (ближе к полюсу). В этом случае геодезическая линия касается нормальных сечений в конечных точках и поэтому значение δ будет равно 0. Последнее не следует из формулы (2.7), а доказывается в фундаментальных курсах сфероидической геодезии.

Разность длин ΔS нормального сечения и геодезической линии выражается следующей формулой:

$$\Delta S = \frac{ae^4}{360} \frac{s^5}{N_m^5} \cos^4 B_m \sin^2 2A. \quad (2.8)$$

При $S=600$ км ΔS составляет всего 0.007 мм и, следовательно, разностью длин геодезической линии и нормального сечения можно пренебречь во всех случаях геодезической практики.

2.3 Упрощенный вывод основного уравнения геодезической линии

Как было ранее показано в 1.7, при перемещении вдоль любой кривой на поверхности эллипсоида изменение широты и долготы характеризуется двумя дифференциальными уравнениями (1.25) и (1.26).

Определим теперь, как изменяется азимут вдоль геодезической линии.

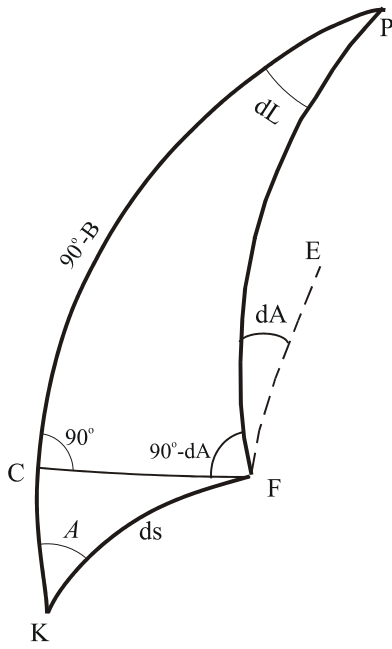


Рис.2.8

Рассмотрим элементарный полярный треугольник KFP (рис.2.8), образованный дугами меридианов KP и FP, а также элементарной дугой геодезической линии ds. Пусть направление начального элемента ds из точки K задано азимутом A.

Проведем из точки F элементарную дугу параллели FC. Точки F и C будут иметь одну и ту же широту. Разности широт и долгот точек K и F обозначим через dB и dL, сближение меридианов в точке F - через dA.

Рассмотрим прямоугольный треугольник PCF. Применим к нему правило Непера, имея в виду, что угол при вершине F равен $90^\circ - dA$, а сторона FP равна $90^\circ - B$

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - B) &= \operatorname{ctgd}L \operatorname{ctg}(90^\circ - dA); \\ \operatorname{tg}dL \sin B &= \operatorname{tg}dA. \end{aligned}$$

Ввиду малости углов dL и dA

$$dA = dL \sin B. \quad (2.9)$$

С учетом формулы (1.26) можем записать

$$dA = \frac{\sin A \sin B ds}{N \cos B} = \frac{\sin A \operatorname{tg}B ds}{N}. \quad (2.10)$$

Из (1.25), (1.26) и (2.10) напомним

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{ds} &= \frac{\cos A}{M} = \frac{V^3}{c} \cos A; \\ \frac{dL}{ds} &= \frac{\sin A}{N \cos B} = \frac{V}{c} \sin A \sec B; \\ \frac{dA}{ds} &= \frac{\sin A \operatorname{tg}B}{N} = \frac{V}{c} \sin A \operatorname{tg}B. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Система уравнений (2.11) имеет важное значение в сфероидической геодезии, т.к. она представляет собой исходные дифференциальные уравнения для решения прямой и обратных геодезических задач на поверхности эллипсоида.

Докажем важную теорему для геодезической линии: *Произведение радиуса параллели на синус азимута в каждой точке геодезической линии - величина постоянная, т.е.*

$$r \sin A = \operatorname{const}.$$

Согласно формуле (1.12) можем записать

$$-dr = M dB \sin B . \quad (2.12)$$

Из формулы (1.25)

$$\cos A = M \frac{dB}{ds} . \quad (2.13)$$

Умножим обе части уравнения (2.13) на $r dA$

$$r \cos A dA = M r \frac{dB}{ds} dA . \quad (2.14)$$

Подставим в правую часть dA из формулы (2.9)

$$r \cos A dA = M r \frac{dB}{ds} dL \sin B . \quad (2.15)$$

Из формулы (1.26) с учетом, что $r = N \cos B$, запишем

$$\sin A = N \cos B \frac{dL}{ds} = r \frac{dL}{ds} . \quad (2.16)$$

Умножим уравнение (2.16) на dr и в правой части заменим dr из (2.12)

$$\begin{aligned} \sin A dr &= r dr \frac{dL}{ds} ; \\ \sin A dr &= -M r \frac{dB}{ds} dL \sin B . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Сложим уравнения (2.15) и (2.17)

$$r \cos A dA + \sin A dr = 0 . \quad (2.18)$$

В левой части получен полный дифференциал, интеграл которого равен $r \sin A$, а поскольку правая часть (2.18) равна 0, то

$$r \sin A = \text{const} . \quad (2.19)$$

Следовательно, теорема доказана.

Уравнение (2.19) получено Клеро и представляет собой основное уравнение геодезической линии на поверхности эллипсоида вращения.

3. РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

3.1 Общие сведения

Измеренные на местности углы и линии после их редуцирования на поверхность референц-эллипсоида используются в дальнейшем для решения различных геодезических задач, основными из которых являются:

1) решение треугольников триангуляции или трилатерации. В первом случае необходимо вычислить длины всех сторон треугольника по измеренным углам и одной стороне, во втором - все углы по измеренным сторонам.

2) вычисление геодезических координат пунктов, расстояний и азимутов направлений, позволяющих определить взаимное положение различных точек на поверхности эллипсоида.

Сложность при решении указанных задач состоит в том, что необходимо учитывать изменяющуюся в зависимости от широты кривизну поверхности эллипсоида.

3.2 Решение малых сфероидических треугольников

Треугольники, образованные на поверхности эллипсоида (сфероида) геодезическими линиями, называются сфероидическими.

На практике обычно приходится иметь дело с треугольниками, стороны которых не превышают 40-50 км и в редких случаях достигают 70-80 км. В работе [3] доказывается, что если длины сторон в треугольнике не превышают 100-200 км, то его можно считать сферическим, т. е. расположенным на сфере соответствующего радиуса. Таким образом, вычисление треугольников в геодезических сетях сводится к решению сферических треугольников.

При решении сферических треугольников по правилам сферической тригонометрии стороны должны выражаться в радианной или градусной мере, т.к. они являются дугами соответствующих больших кругов. Но на местности измерения производятся в линейной мере. Это вызывает необходимость их предварительного перевода в угловую меру, а после решения треугольника - в линейную, что, безусловно, неудобно. Поэтому при решении сферических треугольников применяют два метода, позволяющих получать длины сторон в линейной мере без перевода их в градусную. Такими методами являются решения треугольников по теореме Лежандра и по способу аддитаментов.

3.2.1 Решение сферических треугольников по теореме Лежандра

В 1787 году французский ученый А.Лежандр доказал теорему, которая гласит: *Если стороны плоского и сферического треугольников равны между собой, то углы такого плоского треугольника равны соответствующим углам сферического треугольника, уменьшенным на 1/3 сферического избытка.*

Пусть дан сферический треугольник ABC (рис.3.1,а) со сторонами a , b и c , выраженными в линейных единицах. По сторонам a , b , c построим плоский треугольник $A_1B_1C_1$ (рис.3.1,б). Углы сферического треугольника равны A , B и C , а углы плоского - A_1 , B_1 и C_1 . Требуется определить разности между углами сферического и плоского треугольников, т.е.

$$\Delta A = A - A_1,$$

$$\Delta B = B - B_1,$$

$$\Delta C = C - C_1.$$

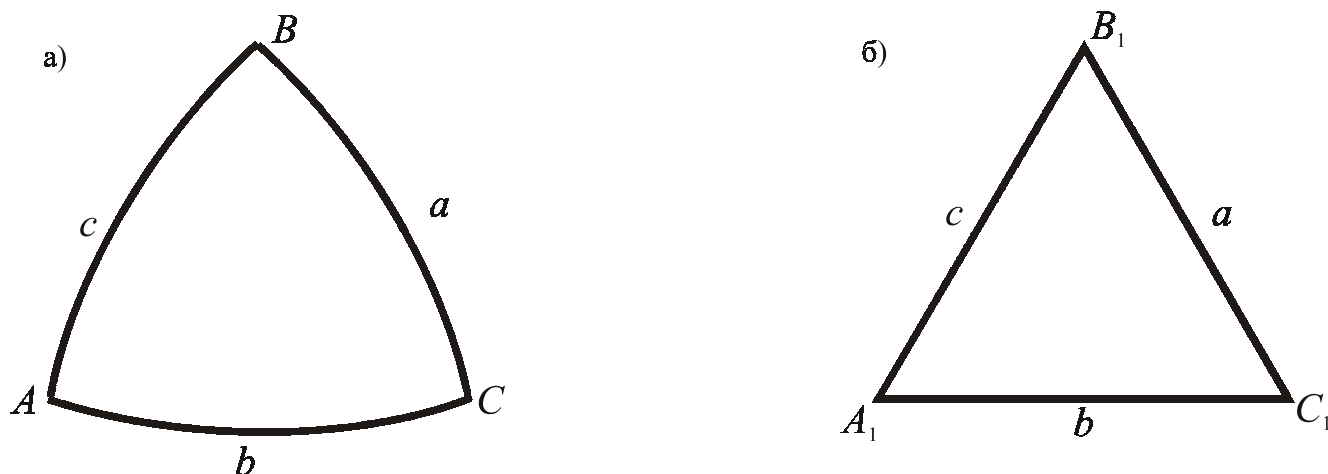


Рис.3.1

Обозначим через R радиус шара, на котором построен сферический треугольник, и выразим стороны сферического треугольника в радианной мере

$\left(\frac{a}{R}\right), \left(\frac{b}{R}\right), \left(\frac{c}{R}\right)$. Тогда по теореме косинусов сторон для сферического тре-

угольника имеем:

$$\cos\left(\frac{a}{R}\right) = \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right) + \sin\left(\frac{b}{R}\right)\sin\left(\frac{c}{R}\right)\cos A,$$

откуда

$$\cos A = \frac{\cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\sin\left(\frac{b}{R}\right)\sin\left(\frac{c}{R}\right)}. \quad (3.1)$$

Учитывая, что величины $\left(\frac{a}{R}\right), \left(\frac{b}{R}\right), \left(\frac{c}{R}\right)$ при длинах сторон порядка 40-50 км и среднем радиусе эллипсоида около 6400 км величины первого порядка малости, разложим синусы и косинусы больших дуг в ряд, ограничиваясь членами четвертой степени.

Учитывая, что

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad \text{и} \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

получим

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} - \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4}\right)}{\left(\frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3}\right)\left(\frac{c}{R} - \frac{c^3}{6R^3}\right)}.$$

Раскроем скобки, и ограничиваясь заданной точностью (не выше четвертой степени), получим

$$\cos A = \frac{-\frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} + \frac{b^2}{2R^2} - \frac{b^4}{24R^4} + \frac{c^2}{2R^2} - \frac{c^4}{24R^4} - \frac{b^2c^2}{4R^4}}{\frac{bc}{R^2}\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6R^2}\right)}.$$

Сгруппировав члены с одинаковыми показателями степени будем иметь

$$\cos A = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24R^2bc}}{1 - \frac{b^2 + c^2}{6R^2}}.$$

Раскладывая знаменатель в биномиальный ряд и ограничиваясь членами меньше четвертой степени, получим

$$\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6R^2}\right)^{-1} = 1 + \frac{b^2 + c^2}{6R^2},$$

и можем записать

$$\cos A = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24R^2bc} \right) \left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6R^2} \right).$$

Перемножив и приведя подобные члены с заданной точностью, получим

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24R^2bc}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь плоский треугольник. Для него по формулам плоской тригонометрии можем записать

$$\cos A_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (3.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sin^2 A_1 &= 1 - \cos^2 A_1 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \\ &= \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4b^2c^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Сравнив формулы (3.3) и (3.4) с (3.2), видим

$$\begin{aligned} \cos A &= \cos A_1 - \frac{bc}{6R^2} \sin^2 A_1 \quad \text{или} \\ \cos A - \cos A_1 &= -\frac{bc}{6R^2} \sin^2 A_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из тригонометрии известно, что

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

С учетом данной формулы перепишем выражение (3.5)

$$-2 \sin \frac{A + A_1}{2} \sin \frac{A - A_1}{2} = -\frac{bc}{6R^2} \sin^2 A_1. \quad (3.6)$$

Учитывая, что разность $(A - A_1)$ - величина малая, можно принять

$$\sin \frac{A - A_1}{2} \approx \frac{A - A_1}{2}; \quad \sin \frac{A + A_1}{2} \approx \sin A_1,$$

и переписать формулу (3.6) следующим образом

$$A - A_1 = \frac{bc}{6R^2} \sin A_1. \quad (3.7)$$

Величина $\frac{1}{2}bc \sin A_1 = P$ является площадью треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому

$$\Delta A = (A - A_1) = \frac{1}{3}\rho \frac{P}{R^2}. \quad (3.8)$$

По аналогии

$$\Delta B = (B - B_1) = \frac{1}{3}\rho \frac{P}{R^2}, \quad (3.9)$$

$$\Delta C = (C - C_1) = \frac{1}{3}\rho \frac{P}{R^2}. \quad (3.10)$$

Почленно суммируя равенства (3.8) - (3.10), получим

$$(A + B + C) - (A_1 + B_1 + C_1) = \rho \frac{P}{R^2}.$$

Зная, что $A_1 + B_1 + C_1 = 180^\circ$,

$$(A + B + C) = 180^\circ + \rho \frac{P}{R^2} = 180^\circ + \varepsilon,$$

где ε -сферический избыток, который вычисляется по одной из формул:

$$\varepsilon = \rho \frac{P}{R^2} = \frac{\rho}{2R^2} bc \sin A_1 = \frac{\rho}{2R^2} ac \sin B_1 = \frac{\rho}{2R^2} ab \sin C_1. \quad (3.11)$$

Исходя из формул (3.8),(3.9),(3.10), с учетом (3.11) получаем искомые значения плоских углов

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A - \frac{1}{3}\varepsilon, \\ B_1 &= B - \frac{1}{3}\varepsilon, \\ C_1 &= C - \frac{1}{3}\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Углы A_1, B_1, C_1 называются **плоскими приведенными углами**.

Для вычисления сферических избытков, строго говоря, необходимо использовать углы плоского треугольника, которые нам неизвестны. Как показывают исследования, при длинах сторон до 90 км для вычисления ε можно пользоваться сферическими углами, допуская ошибку в вычислениях избытка не более 0.0005".

Для общей ориентировки приведем числовые значения сферических избытков при различных длинах сторон для равносторонних треугольников:

s, км	5	10	20	30	60	90
ε''	0.07	0.25	1	2	8	18

Запишем формулы для вычисления сферического избытка в следующем виде:

$$\varepsilon'' = fbc \sin A_1 = fac \sin B_1 = fab \sin C_1, \quad (3.13)$$

где:

$$f = \frac{\rho''}{2R_m^2}, \quad (3.14)$$

R_m -средний радиус кривизны, вычисленный по средней широте B , на которой расположен треугольник ABC.

Следовательно, величины f зависят от широты (табл.3.1), но для территории нашей страны с достаточной точностью можно принимать $f=0,00253$.

Таблица 3.1

В, градус	f	В, градус	f	В, градус	f
36	0.0025404	46	0.0025345	56	0.0025287
38	392	48	333	58	276
40	381	50	322	60	266
42	369	52	310	62	256
44	357	54	299	64	246

Формулы (3.12) выражают теорему Лежандра для малых сферических треугольников, стороны которых не превышают 200 км. В этом случае ошибки вычисления плоских углов треугольника будут не более 0.001".

Значение теоремы Лежандра заключается в том, что она позволяет при решении малых сферических треугольников использовать формулы плоской тригонометрии.

3.2.2 Решение сферических треугольников способом аддитаментов

Этот способ предложен немецким ученым И.Зольднером в 1820г. Сущность способа состоит в решении треугольников по формулам плоской тригонометрии с использованием сферических углов и сторон, исправленных специальными поправками - **аддитаментами** (от слова *addition*)

Сохраняя прежние обозначения углов и длин сторон сферического треугольника, выразим стороны в радианной мере и, применяя теорему синусов, запишем:

$$\frac{\sin\left(\frac{a}{R}\right)}{\sin A} = \frac{\sin\left(\frac{b}{R}\right)}{\sin B} = \frac{\sin\left(\frac{c}{R}\right)}{\sin C}. \quad (3.15)$$

Пусть сторона a известна. В соответствии с формулой (3.15) найдем сторону b :

$$\sin\left(\frac{b}{R}\right) = \frac{\sin\left(\frac{a}{R}\right) \sin B}{\sin A}. \quad (3.16)$$

Раскладывая синусы малых величин (b/R) и (a/R) в ряд и ограничиваясь двумя членами разложения, получим:

$$\frac{1}{R} \left(b - \frac{b^3}{6R^2} \right) = \frac{1}{R} \left(a - \frac{a^3}{6R^2} \right) \frac{\sin B}{\sin A}. \quad (3.17)$$

Введем обозначения

$$A_a = \frac{a^3}{6R^2}; \quad A_b = \frac{b^3}{6R^2}; \quad A_c = \frac{c^3}{6R^2}; \quad (3.18)$$

$$a' = a - A_a; \quad b' = b - A_b; \quad c' = c - A_c \quad (3.19)$$

Величины A_a, A_b, A_c будем называть **аддитаменентами**.

Тогда с учетом формулы (3.17) получим

$$b' = a' \frac{\sin B}{\sin A}. \quad (3.20)$$

По аналогии

$$c' = a' \frac{\sin C}{\sin A}. \quad (3.21)$$

Формулы (3.20) и (3.21) представляют собой формулы плоской тригонометрии, но в них использованы сферические углы A, B, C и стороны, исправленные аддитаменентами A_a, A_b, A_c . Искомые стороны сферического треугольника будут равны:

$$b = b' + A_b; \quad c = c' + A_c.$$

Порядок вычислений при применении способа аддитаментов следующий:

1) по исходной стороне a вычисляют ее аддитамент A_a , который вычитают из нее и получают a' ;

2) используя полученное значение a' и сферические углы, вычисляют по формулам (3.20) и (3.21) значения b' и c' ;

3) по найденным сторонам b' и c' определяют их аддитаменты A_b, A_c ;

4) прибавляя к b' и c' их аддитаменты, получают искомые значения сторон сферического треугольника, выраженные в линейной форме.

В общем случае в формулах (3.18) средний радиус кривизны определяется по средней широте сети треугольников и принимается постоянным в пределах изменения широты до 5° (около 1000 км).

В том случае, когда длины сторон треугольников не превышают 100 км, аддитаменты вычисляют по формулам

$$A_a = ka^3; \quad A_b = kb^3; \quad A_c = kc^3, \quad (3.22)$$

где k -коэффициент, который можно принимать постоянным на территории всей страны. Если выразить длины сторон при вычислении аддитаментов в километрах, аддитаменты в метрах, то величина k равна $409 \cdot 10^{-8}$.

3.2.3 Решение треугольников трилатерации

Для треугольника трилатерации со сторонами, редуцированными на поверхность эллипсоида, решение состоит из следующих операций:

1) принимая треугольник как плоский, вычисляют углы "плоского треугольника" по формулам косинусов:

$$\begin{aligned} \cos A_1 &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\ \cos B_1 &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \\ \cos C_1 &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \end{aligned}$$

2) определяют сферический избыток по формуле (3.13).

3) исходя из теоремы Лежандра вычисляют углы сферического треугольника

$$\left. \begin{aligned} A &= A_1 + \frac{1}{3} \varepsilon, \\ B &= B_1 + \frac{1}{3} \varepsilon, \\ C &= C_1 + \frac{1}{3} \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

3.3 Общие сведения о решении главных геодезических задач

При вычислениях в системе геодезических координат на поверхности эллипсоида основными являются так называемые прямая и обратная геодезические задачи. Часто их называют главными **геодезическими задачами**.

Пусть на поверхности эллипсоида взяты точки Q_1 и Q_2 (рис.3.2.). Если точку Q_1 называть начальной, а Q_2 - конечной, то направление Q_1Q_2 называется прямым и азимут A_{12} - прямым азимутом этого направления, а направление Q_2Q_1 - обратным и азимут A_{21} обратным азимутом. Кратчайшим расстоянием между

этимися точками является геодезическая линия длиной s .

Прямая геодезическая задача состоит в том, чтобы по известным координатам начальной точки B_1, L_1 , прямому азимуту A_{12} и расстоянию s определить координаты конечной точки B_2, L_2 и обратный азимут A_{21} .

Обратная геодезическая задача заключается в том, чтобы по известным координатам начальной B_1, L_1 и конечной B_2, L_2 точек, определить расстояние между ними s и азимуты A_{12} и A_{21} .

Прямую и обратную геодезические задачи приходится решать для различных длин геодезических линий. В настоящее время приняты следующие группы расстояний, для каждой из которых разработаны соответствующие

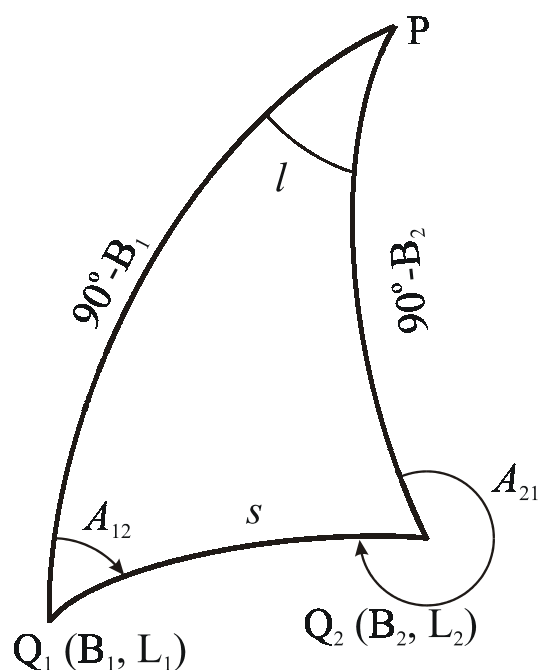


Рис.3.2

методы решения главных геодезических задач :

1. Малые расстояния (от 20 до 200 км). Они соответствуют сторонам триангуляции 1 класса, равным обычно 20-30 км, и длинам звеньев рядов триангуляции 1 класса, составляющим около 200 км.

2. Средние расстояния (от 200 до 800 км). На такие расстояния главные геодезические задачи решаются :

- при вычислении диагоналей полигонов триангуляции 1 класса;
- при обработке астрономо-геодезической сети;
- при обработке градусных измерений в связи с выводом размеров эллипсоида;
- при развитии динамической триангуляции и т.д.

3. Большие расстояния (более 800 км). Они встречаются:

- при ориентировке референц-эллипсоида;

- в космической триангуляции и навигации;
- в радионавигации и т. п.

В настоящем курсе мы будем рассматривать только первую группу расстояний.

Математические методы решения геодезических задач обеспечивают выполнение вычислений с любой практически необходимой точностью. Однако чем выше требуемая точность, тем сложнее вычисления. Поэтому при любых вычислениях следует заранее установить практически необходимую точность. Рассмотрим этот вопрос, ориентируясь на самое высокоточное построение, которому соответствует триангуляция 1 класса.

В триангуляции 1 класса углы измеряются с погрешностью $m_\beta = 0,7''$, а длины сторон с относительной погрешностью 1:400 000. Длины сторон должны быть не менее 20 км. Линейный сдвиг конечной точки линии длиной 20 км, вызванный ошибками измерения углов и расстояний равен

$$ds = \frac{m_\beta}{\rho} s = \frac{0,7 \cdot 20000}{2 \cdot 10^5} \approx 0,07 \text{ м};$$

$$ds = \left(\frac{m_s}{s} \right) s = \frac{1}{400000} 20000 \approx 0,05 \text{ м};$$

Таким образом, можно считать, что в среднем проекция линейного сдвига вершины треугольника на меридиан или параллель составляет около 0,05 м.

В градусной мере проекция линейного сдвига на меридиан равна

$$dB = \frac{ds}{M} \rho'' = \frac{0,05 \cdot 206265}{6400000} \approx 0,0015''.$$

В триангуляции 1 класса геодезические координаты и азимуты вычисляются последовательно от пункта к пункту. Чтобы не допустить накопления погрешностей в координатах за счет погрешностей вычислений, широты и долготы вычисляют с точностью на порядок выше, т.е. до 0,0001".

Точность определения азимутов устанавливается исходя из точности измерения направлений на станции. Уравненные на станции измеренные направления вычисляют до 0,01". Чтобы избежать накопления погрешностей при передаче азимута от пункта к пункту, геодезические азимуты принято вычислять с точностью до 0,001".

В каталогах помещаются округленные после уравнивания геодезических сетей значения:

- координат с точностью до 0,001".
- азимутов с точностью до 0,01".

3.4 Пути и способы решения главных геодезических задач

Существуют два основных пути решения прямой и обратной геодезической задач: прямой и косвенный.

Прямой путь заключается в непосредственном решении сфероидического треугольника Q_1PQ_2 (рис.3.2) по двум сторонам и углу между ними.

В прямой задаче известны стороны $Q_1P=90^\circ-B_1$, $Q_1Q_2=s$ и угол A_{12} . Из решения треугольника определяются остальные элементы:

- разность долгот l , служащая для определения долготы L_2 ;
- сторона $Q_2P=90^\circ-B_2$, служащая для определения широты B_2 ;
- угол Q_1Q_2P , по которому вычисляется азимут $A_{21}=360^\circ-\angle Q_1Q_2P$.

В обратной задаче известны стороны $Q_1P=90^\circ-B_1$, $Q_2P=90^\circ-B_2$ и разность долгот $l=L_2-L_1$. Из решения треугольника находятся:

- сторона $Q_1Q_2=s$;
- угол A_{12} ;
- угол Q_1Q_2P , с использованием которого вычисляется азимут $A_{21}=360^\circ-\angle Q_1Q_2P$.

Сложность данного пути решения состоит в том, что длины сторон Q_1P и Q_2P достигают несколько тысяч километров (например, при расположении стороны Q_1Q_2 на широте 50° стороны Q_1P и Q_2P будут порядка 4000 км) и поэтому ΔQ_1PQ_2 нужно рассматривать только как сфероидический. Для решения сфероидических треугольников нет конечных замкнутых формул, так как их стороны, представляющие дуги меридианов и параллелей или геодезические линии на поверхности эллипсоида, выражаются эллиптическими интегралами, не определяющимися в элементарных функциях.

Поэтому на практике, особенно при вычислении с небольшими длинами сторон (например, в триангуляции), предпочитают применять более простые косвенные методы решения главных геодезических задач.

Косвенный путь решения главных геодезических задач заключается в отыскании малых разностей широт, долгот и азимутов:

$$\Delta B = B_2 - B_1, \quad \Delta L = L_2 - L_1, \quad \Delta A = A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ. \quad (3.24)$$

Следовательно, в этом случае необходимо получить формулы для вычисления величин ΔB , ΔL , ΔA , после этого определяемые координаты (например, при решении прямой задачи) находят по формулам

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + \Delta B = B_1 + (B_2 - B_1) \\ L_2 &= L_1 + \Delta L = L_1 + (L_2 - L_1) \\ A_{21} &= A_{12} + \Delta A = A_{12} + (A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ) \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Ранее были получены уравнения (2.11), связывают между собой четыре переменные: B , L , A и s , из которых длина геодезической линии s принята в качестве независимой переменной. Формулы (2.11) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Они дают возможность определить разности $(B_2 - B_1)$, $(L_2 - L_1)$ и $(A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ)$ путем интегрирования между двумя точками на эллипсоиде. Интегрируя по дуге s между точками Q_1 и Q_2 , получаем:

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= \int_0^s \frac{V^3}{c} \cos A ds, \\ L_2 - L_1 &= \int_0^s \frac{V}{c} \sec B \sin A ds, \\ A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ &= \int_0^s \frac{V}{c} \operatorname{tg} B \sin A ds. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Эти интегралы не выражаются в интегральных функциях. Поэтому точные их значения неизвестны.

Для приближенного вычисления интегралов применяют разложения в ряды или самих интегралов, или подынтегральных функций с последующим почленным интегрированием каждого ряда.

Рассмотрим первый путь интегрирования. Разложим интегралы (3.26) в следующие ряды по степеням дуги s .

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= \left(\frac{dB}{ds} \right)_1 s + \left(\frac{d^2 B}{ds^2} \right)_1 \frac{s^2}{2!} + \left(\frac{d^3 B}{ds^3} \right)_1 \frac{s^3}{3!} + \dots \\ L_2 - L_1 &= \left(\frac{dL}{ds} \right)_1 s + \left(\frac{d^2 L}{ds^2} \right)_1 \frac{s^2}{2!} + \left(\frac{d^3 L}{ds^3} \right)_1 \frac{s^3}{3!} + \dots \\ A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ &= \left(\frac{dA}{ds} \right)_1 s + \left(\frac{d^2 A}{ds^2} \right)_1 \frac{s^2}{2!} + \left(\frac{d^3 A}{ds^3} \right)_1 \frac{s^3}{3!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Индекс внизу скобок указывает на то, что частные производные берутся в начальной точке.

После подстановки в формулы (3.27) частных производных получаются рабочие формулы в виде рядов. Естественно, возникает вопрос о том, сколько членов ряда необходимо для получения решения с заданной точностью. Для этого введем понятие малой величины первого порядка. За эту величину принимают отношение $\frac{s}{R}$. Малой величиной n -го порядка будет $\left(\frac{s}{R}\right)^n$. Тогда необ-

ходимое число членов рядов равно такому порядку малости n , которое соответствует требуемой точности вычислений.

Возьмем сторону триангуляции 1-го класса со стороной $s = 20$ км и вычислим величины $\left(s/R\right)^n$ (табл.3.2).

Таблица 3.2

Порядок малости	$\left(s/R\right)^n$	Выражение малой величины в секундах $\rho''\left(s/R\right)^n$
1	$1/2 \cdot 10^{-2}$	1000
2	$1/4 \cdot 10^{-4}$	5
3	$1/8 \cdot 10^{-6}$	0.02
4	$1/16 \cdot 10^{-8}$	0.001

Из таблицы следует, что при $s < 30$ км для решения главных геодезических задач нужно учитывать четыре первых члена разложения. При $s > 30$ км возникает необходимость удерживать большее количество членов.

Первые члены рядов (3.27) вычисляют по формулам (2.11). Остальные коэффициенты находят последовательным дифференцированием первых коэффициентов по переменным B и A как сложных функций. Например:

$$\frac{d^2 B}{ds^2} = \frac{\partial \left(\frac{dB}{ds} \right)}{\partial B} \frac{dB}{ds} + \frac{\partial \left(\frac{dB}{ds} \right)}{\partial A} \frac{dA}{ds}.$$

Окончательные формулы для второй и третьей производной широты имеют вид:

$$\frac{d^2 B}{ds^2} = -\frac{tg B}{MN} (3\eta^2 \cos^2 A + \sin^2 A),$$

$$\frac{d^3 B}{ds^3} = -\frac{1}{MN} \left[\cos A \sin^2 A (1 + 3tg^2 B + \eta^2 - 9\eta^2 tg^2 B) + \right. \\ \left. + 3\eta^2 \cos^2 A (1 - tg^2 B + \eta^2 - 5\eta^2 tg^2 B) \right].$$

Как видно из приведенных формул, вычисление коэффициентов в рядах (3.27) весьма затруднительно. Используя некоторые рациональные приемы, формулы (3.27) можно преобразовать так, что они будут достаточно простыми как для ручного счета, так и для счета на ЭВМ. Поэтому на практике широко используются известные методы решения задач:

- метод вспомогательной точки;
- метод Гаусса, основанный на разложении в ряд по среднему аргументу.

В первом случае вводят вспомогательную точку на меридиане начальной точки геодезической линии. Тогда ряды, примененные к линиям между начальной и вспомогательной, а также между вспомогательной и конечной точками, примут весьма простой вид. Во втором случае данные (B, A) задаются не для начальной, а для средней точки геодезической линии. Поэтому число членов ряда уменьшается в два раза.

В настоящее время, в связи с широким использованием ЭВМ, появилась возможность использовать методы численного решения дифференциальных уравнений. Наибольшее распространение получил метод Рунге-Кутты, а также его модификации - метод Рунге-Кутты-Ингленда и метод Рунге-Кутты-Мерсона.

3.5 Решение прямой геодезической задачи по способу вспомогательной точки (формулы Шрейбера)

Данный способ применяется для решения прямой геодезической задачи на малые расстояния, в частности в сетях триангуляции 1 класса. Подробное рассмотрение метода можно найти в [3,4]. Ниже приводятся окончательные формулы из работы [3].

Исходные данные: B_1, L_1, A_{12}, s .

Искомые величины:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_0 - d'', \\ L_2 &= L_1 - l'', \\ A_{21} &= A_{12} \pm 180^\circ + (t - \varepsilon)\rho''. \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Промежуточные вычисления:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{s}{c} V_1^2, & u_0 &= \sigma \cos A_{12}, & v_0 &= \sigma \sin A_{12}, \\ u &= u_0 \left(1 + \frac{v_0^2}{3} \right), & v &= v_0 \left(1 + \frac{u_0^2}{6} \right), \\ B_0 &= B_1 + \rho'' u \left[V_1 - \frac{e'^2}{4} u (3 \sin 2B_1 + 2u \cos 2B_1) \right], \\ \gamma &= \frac{v V_0}{V_1^2}, & \lambda &= \frac{\gamma}{\cos B_0}, & \tau &= \lambda \sin B_0, \\ l'' &= \lambda \left(1 - \frac{\tau^2}{3} \right) \rho'', & d'' &= \frac{t\gamma}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{12} \right) V_0 \rho'', \\ t &= \tau \left(1 - \frac{\lambda^2 + \tau^2}{6} \right), & \varepsilon &= \frac{uv}{2}.\end{aligned}$$

В данных формулах:

c - полярный радиус кривизны;

V_1, V_0 - вторые основные сфероидические функции, вычисляемые по формуле (1.7) соответственно по широте B_1 и B_0 .

Эти формулы позволяют при расстояниях между пунктами не более 100 км определять геодезические координаты с точностью до 0.0001" и азимуты с точностью до 0.001".

3.6 Решение геодезических задач по формулам со средним аргументом (способ Гаусса)

Возьмем точку C , расположенную на середине кривой $Q_1 Q_2$ (рис.3.3). Если длина геодезической линии $Q_1 Q_2$ равна s , то точка C будет находиться от точек Q_1 и Q_2 на одинаковом расстоянии $s/2$. Обозначим координаты точки C через B_0, L_0 и азимут геодезической линии в этой точке через A_{12} .

Запишем ряды для вычисления разности широт точек Q_1 и C , а также Q_2 и C по аналогии с первой формулой (3.26), принимая точку C за начальную

$$B_1 - B_0 = -\left(\frac{dB}{ds}\right)_0 \frac{s}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{4} - \frac{1}{6}\left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{8!} + \dots, \quad (3.29)$$

$$B_2 - B_0 = +\left(\frac{dB}{ds}\right)_0 \frac{s}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{4} + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{8!} + \dots. \quad (3.30)$$

Вычитая из второго ряда первый находим искомую разность широт точек Q_1 и Q_2 с учетом членов четвертого порядка включительно

$$b = B_2 - B_1 = \left(\frac{dB}{ds}\right)_0 s + \frac{1}{24}\left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_0 s^3. \quad (3.31)$$

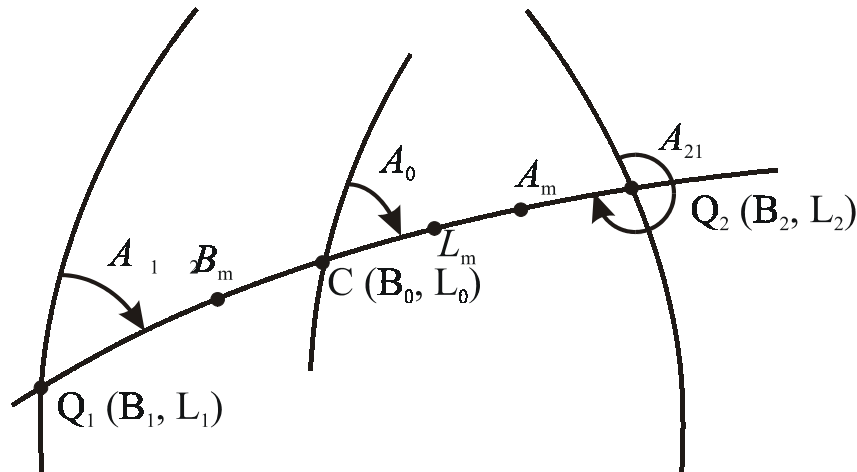


Рис.3.3

Аналогично, используя ряды для приращения долгот и азимутов, получим

$$l = L_2 - L_1 = \left(\frac{dL}{ds}\right)_0 s + \frac{1}{24}\left(\frac{d^3L}{ds^3}\right)_0 s^3, \quad (3.32)$$

$$a = A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ = \left(\frac{dA}{ds}\right)_0 s + \frac{1}{24}\left(\frac{d^3A}{ds^3}\right)_0 s^3. \quad (3.33)$$

Нулевой индекс в формулах (3.31)-(3.33) показывает, что производные должны браться по B_0 , L_0 и A_0 .

Сравнение рядов (3.26) и (3.31)-(3.33) показывает несомненное преимущество рядов со средними аргументами, а именно:

- члены с четными степенями исчезли;
- в оставшихся членах с нечетными степенями коэффициенты уменьшились в несколько раз.

Поэтому новые ряды лучше сходятся и имеют более компактный вид.

Значения B_0 , L_0 и A_0 нам неизвестны, и поэтому целесообразно перейти к средним значениям широты, долготы и азимута

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}, \quad L_m = \frac{L_1 + L_2}{2}, \quad A_m = \frac{A_{12} \pm 180^\circ + A_{21}}{2}.$$

Эти значения соответствуют точкам B_m , L_m и A_m на рис.3.3, которые не совпадают между собой и с точкой C . Поэтому в формулах (3.31)-(3.33) необходимо ввести поправки за разности $(B_m - B_0)$, $(L_m - L_0)$ и $(A_m - A_0)$.

С учетом указанных поправок окончательные формулы будут иметь вид

$$b = \left(\frac{dB}{ds} \right)_m s - \frac{s^3}{8} \left(\frac{d^2 B}{ds^2} \right)_m \frac{\partial \left(\frac{dB}{ds} \right)_m}{\partial B} - \frac{s^3}{8} \left(\frac{d^2 A}{ds^2} \right)_m \frac{\partial \left(\frac{dB}{ds} \right)_m}{\partial A} + \frac{s^3}{24} \left(\frac{d^3 B}{ds^3} \right)_m, \quad (3.34)$$

$$l = \left(\frac{dL}{ds} \right)_m s - \frac{s^3}{8} \left(\frac{d^2 B}{ds^2} \right)_m \frac{\partial \left(\frac{dL}{ds} \right)_m}{\partial B} - \frac{s^3}{8} \left(\frac{d^2 A}{ds^2} \right)_m \frac{\partial \left(\frac{dL}{ds} \right)_m}{\partial A} + \frac{s^3}{24} \left(\frac{d^3 L}{ds^3} \right)_m, \quad (3.35)$$

$$a = \left(\frac{dA}{ds} \right)_m s - \frac{s^3}{8} \left(\frac{d^2 B}{ds^2} \right)_m \frac{\partial \left(\frac{dA}{ds} \right)_m}{\partial B} - \frac{s^3}{8} \left(\frac{d^2 A}{ds^2} \right)_m \frac{\partial \left(\frac{dA}{ds} \right)_m}{\partial A} + \frac{s^3}{24} \left(\frac{d^3 A}{ds^3} \right)_m. \quad (3.36)$$

Все коэффициенты при s и s^3 в формулах (3.34)-(3.36) являются функциями средней широты B_m и среднего азимута A_m .

Если определить значения производных и подставить их в (3.34)-(3.36), то получим так называемые полные формулы Гаусса со средней широтой и средним азимутом, не учитывающие лишь члены пятого порядка малости. Их применяют для решения прямых и обратных геодезических задач при расстояниях до 200 км.

При выводе менее точных формул для $s < 30-40$ км могут быть отброшены члены четвертого порядка малости. При этом условии после нахождения частных производных, подстановки в уравнения (3.34)-(3.36) и приведения подобных членов получим [2]:

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{s \cos A_m}{M_m} \left(1 + \frac{s^2 \sin^2 A_m}{12 N_m^2 \cos^2 B_m} + \frac{s^2 \sin^2 A_m \operatorname{tg}^2 B_m}{24 N_m^2} \right), \\ l &= \frac{s \sin A_m}{N_m \cos B_m} \left(1 + \frac{s^2 \sin^2 A_m \operatorname{tg}^2 B_m}{24 N_m^2} - \frac{s^2 \cos^2 B_m}{24 N_m^2} \right), \\ a &= \frac{s \sin A_m \operatorname{tg} B_m}{N_m} \left(1 + \frac{s^2 \sin^2 A_m}{12 N_m^2 \cos^2 B_m} - \frac{s^2 \sin^2 A_m \operatorname{tg}^2 B_m}{12 N_m^2} + \frac{s^2 \cos^2 A_m}{8 N_m^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Прямая геодезическая задача

С ошибкой на величины пятого порядка запись поправочных членов в формулах (3.37) можно упростить. Тогда

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{\rho}{M_m} s \cos A_m \left[1 + \frac{l^2}{12 \rho^2} + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24 \rho^2} \right], \\ l &= \frac{\rho}{N_m} s \sin A_m \sec B_m \left[1 - \frac{b^2}{24 \rho^2} + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24 \rho^2} \right], \\ a &= l \sin B_m \left[1 + \frac{b^2}{8 \rho^2} + \frac{l^2}{12 \rho^2} - \frac{l^2 \sin^2 B_m}{12 \rho^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Имея разности координат и азимутов, можно найти координаты конечной точки и обратный азимут:

$$B_2 = B_1 + b, \quad L_2 = L_1 + l, \quad A_{21} = A_{12} \pm 180 + a. \quad (3.39)$$

При решении прямой задачи средние значения широт и азимутов являются неизвестными. Неизвестны также разности b , l и a , необходимые для вычисления поправочных членов. Поэтому решение прямой задачи со средними аргументами может быть выполнено только способом последовательных приближений, причем в первом приближении принимается, что $B_m = B_1$ и $A_m = A_{12}$ или же эти координаты определяют приближенно, например по картам.

Обратная геодезическая задача

При решении обратной задачи средние аргументы определяются просто, так как известны координаты начальной и конечной точек. В этом случае сразу определяются разности $b = B_2 - B_1$ и $l = L_2 - L_1$, а также средняя широта $B_m = (B_2 + B_1)/2$. Тем самым основной недостаток решения прямой задачи,

связанный с необходимостью применения метода последовательных приближений, в данном случае исключается. Из формулы (3.38) получим

$$\left. \begin{aligned} s \cos A_m &= bM_m \left[1 - \frac{2l^2 + l^2 \sin^2 B_m}{24} \right] = Q, \\ s \sin A_m &= l \cos B_m N_m \left[1 + \frac{b^2 - l^2 \sin^2 B_m}{24} \right] = P, \\ a &= l \sin B_m \left[1 + \frac{3b^2 + 2l^2 - 2l^2 \sin^2 B_m}{24\rho^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Решение задачи завершается применением следующих формул:

$$\operatorname{tg} A_m = \frac{P}{Q}, \quad (3.41)$$

$$s = Q \cos A_m + P \sin A_m = \sqrt{Q^2 + P^2}, \quad (3.42)$$

$$A_{12} = A_m - a/2, \quad (3.43)$$

$$A_{21} = A_m + a/2 \pm 180^\circ. \quad (3.44)$$

По знакам числителя и знаменателя (3.41) определяют четверть, к которой относится средний азимут A_m .

3.7 Решение главных геодезических задач методами численного интегрирования дифференциальных уравнений

3.7.1 Общие сведения о численных решениях дифференциальных уравнений

Рассмотрим кратко общие вопросы численного интегрирования дифференциальных уравнений. Пусть имеется обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3.45)$$

для которого известны начальные условия

$$y_0 = f(x_0). \quad (3.46)$$

Когда прямое решение дифференциального уравнения в виде $y=f'(x)$ найти трудно, прибегают к численному интегрированию, которое состоит в получении ряда значений y_1, y_2, \dots, y_n без определения вида функции $y=f'(x)$.

Следовательно, численные методы вместо отыскания функции $y=f'(x)$ позволяют получить набор значений этой функции.

Один из простейших методов численного интегрирования - метод Эйлера - основан на разложении функции $y=f'(x)$ в ряд Тейлора по степеням h :

$$y_{i+1}(x_i + h) = y_i(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{6} y'''(x_i) + \frac{h^4}{24} y^{IV}(x_i) + \dots (3.47)$$

где $h = x_{i+1} - x_i$ - шаг интегрирования.

При малом значении h третий и последующий члены ряда отбрасываются и тогда получаем формулу Эйлера

$$y_{i+1} = y_i(x_i) + hy'(x_i) \quad (3.48)$$

или

$$y_{i+1} = y_i(x_i) + \Delta y_i; \quad \Delta y_i = hy'(x_i). \quad (3.49)$$

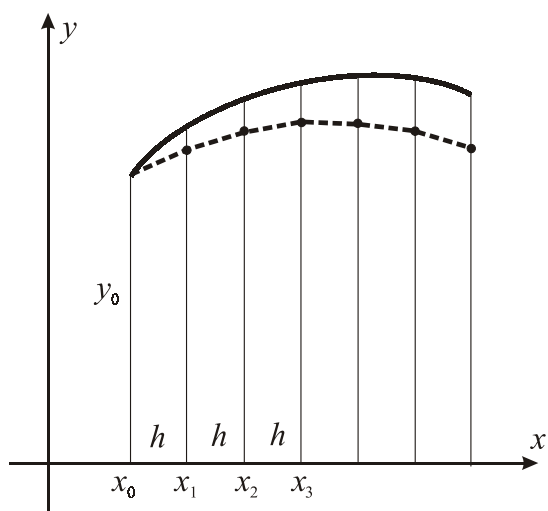


Рис.3.4

Геометрический смысл формулы Эйлера ясен из рис.3.4. Интегральная кривая заменяется ломаной, звенья которой имеют постоянную горизонтальную проекцию h . Первое звено касается искомой интегральной кривой в точке (x_0, y_0) . Формулы (3.48) или (3.49) приводят к получению весьма приближенного результата, состоящего из предыдущего значения y и произведения шага интегрирования на значение подынтегральной функции.

В практических задачах по численному интегрированию дифференциальных уравнений широкое применение находят методы Рунге-Кутты, из которых наибольшее распространение получил метод четвертого порядка, в котором используются разложения ряда (3.47), включая члены с h^4 .

Рабочие формулы метода Рунге-Кутты имеют следующий вид:

$$y_{i+1} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3.50)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3). \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

Величины k_i представляют собой значение искомой функции $y=f'(x)$ в промежуточных точках с координатами (рис.3.5):

- в начальной точке 1: x_i, y_i ;
- в точке 2: $x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1$;
- в точке 3: $x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2$;
- в точке 4: $x_i + h, y_i + k_3$.

Геометрический смысл этого метода легко прослеживается по последовательности формул (3.51), из которых видно, что каждый шаг расчета представляет собой, в сущности, шаг по методу Эйлера.

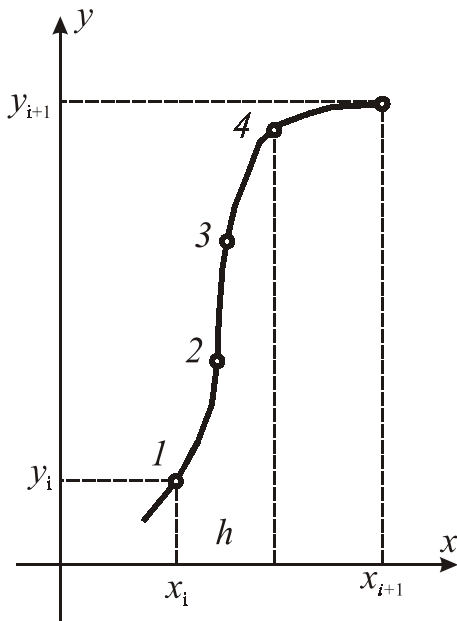


Рис.3.5

Сначала следует сделать шаг величины $h/2$ из точки 1 (x_i, y_i) под углом α_1 , $y_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = k_1/h$, и мы приходим в точку 2 $(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$. В этой точке вычисляется направление $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2/h$ и, делая шаг в этом направлении, снова из точки 1 попадаем в точку 3 $(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$. Затем по направлению $\operatorname{tg} \alpha_3 = k_3/h$ снова из точки 1 делается шаг величины h , который приводит в точку 4 $(x_i + h, y_i + k_3)$, в которой вычисляется $\operatorname{tg} \alpha_4 = k_4/h$. Полученные четыре тангенса усредняются с весами $1/6, 2/6, 2/6, 1/6$ по формуле (3.50) и по этому окончательному направлению делаем окончательный шаг из (x_i, y_i) в (x_{i+1}, y_{i+1}) .

В практике решения геодезических задач находят применение модификации метода Рунге-Кутты. Это методы Рунге-Кутты-Мерсона и Рунге-Кутты-Ингленда.

Рабочие формулы для метода Рунге-Кутты-Мерсона имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}(k_1 + 4k_4 + k_5), \\ k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= \frac{1}{3}hf\left(x_i + \frac{1}{3}h, y_i + k_1\right), \\ k_3 &= \frac{1}{3}hf\left(x_i + \frac{1}{3}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= \frac{1}{3}hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{3}{8}k_1 + \frac{9}{8}k_3\right), \\ k_5 &= \frac{1}{3}hf\left(x_i + h, y_i + \frac{3}{2}k_1 + 6k_4 - \frac{9}{2}k_3\right), \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

а для метода Рунге-Кутты-Ингленда

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4), \\ k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{4}(k_1 + k_2)\right), \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i - k_2 + 2k_3). \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

По точности получаемых результатов оба этих способа равноценны, но способ Рунге-Кутты-Ингленда несколько экономичнее по числу операций. Однако при использовании современных ЭВМ это преимущество не является существенным.

3.7.2 Решение прямой геодезической задачи по методу Рунге-Кутты-Мерсона

Применим метод Рунге-Кутты-Мерсона для численного интегрирования трех дифференциальных уравнений (2.11), которые представим в таком виде:

$$\begin{aligned}
f_B(B, A) &= \frac{\cos A}{c} \left(1 + e'^2 \cos^2 B\right)^{3/2}, \\
f_L(B, A) &= \frac{\sin A}{c \cos B} \left(1 + e'^2 \cos^2 B\right)^{1/2}, \\
f_A(B, A) &= f_L(B, A) \sin B.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Заданными начальными значениями искомых функций в точке $s=0$ служат координаты B_1, L_1 и азимут A_1 .

Примем один шаг интегрирования $h=s$. Координаты и обратный азимут в конечной точке линии s определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned}
B_2 &= B_1 + \Delta B_1 + 4\Delta B_4 + 4\Delta B_5, \\
L_2 &= L_1 + \Delta L_1 + 4\Delta L_4 + 4\Delta L_5, \\
A_2 &= A_1 + \Delta A_1 + 4\Delta A_4 + 4\Delta A_5 \pm 180^\circ.
\end{aligned} \right\} \tag{3.55}$$

В выражениях (3.52) k_i заменим для аргумента широты через ΔB_i , а для аргумента азимута - через ΔA_i . Тогда

$$\left. \begin{aligned}
\Delta B_i &= \sigma \cos \alpha_i V_i^3, \\
\Delta L_i &= \frac{\sigma \sin \alpha_i}{\cos \varphi_i} V_i, \\
\Delta B_i &= \Delta L_i \sin \varphi_i,
\end{aligned} \right\} \tag{3.56}$$

где $i=1,2,3,4,5$; $\sigma = \frac{s}{6c} \rho''$.

Значения текущих переменных φ_i и α_i , используемых при вычислениях функций f_B и f_L представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 - Значения текущих переменных φ_i и α_i при вычислениях способом Рунге-Кутта-Мерсона

i	φ_i	α_i
1	B_1	A_1
2	$B_1 + 2\Delta B_1$	$A_1 + 2\Delta A_1$
3	$B_1 + \Delta B_1 + \Delta B_2$	$A_1 + \Delta A_1 + \Delta A_2$
4	$B_1 + \frac{3}{4}\Delta B_1 + \frac{9}{4}\Delta B_3$	$A_1 + \frac{3}{4}\Delta A_1 + \frac{9}{4}\Delta A_3$
5	$B_1 + 3\Delta B_1 - 9\Delta B_3 + 12\Delta B_4$	$A_1 + 3\Delta A_1 - 9\Delta A_3 + 12\Delta A_4$

3.7.3 Решение прямой геодезической задачи способом Рунге-Кутты-Ингганда

В соответствии с выражениями (3.53) приведем рабочие формулы, позволяющие реализовать данный метод

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + \frac{1}{6}(\Delta B_1 + 4\Delta B_3 + \Delta B_4), \\ L_2 &= L_1 + \frac{1}{6}(\Delta L_1 + 4\Delta L_3 + \Delta L_4), \\ A_2 &= A_1 + \frac{1}{6}(\Delta A_1 + 4\Delta A_3 + \Delta A_4), \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_i &= \frac{s}{c} \rho'' V_i^3 \cos \alpha_i = s_0 V_i^3 \cos \alpha_i, \\ \Delta L_i &= \frac{s}{c} \rho'' V_i^3 \frac{\sin \alpha_i}{\cos \varphi_i} = s_0 V_i^3 \frac{\sin \alpha_i}{\cos \varphi_i}, \\ \Delta A_i &= \frac{s}{c} \rho'' V_i^3 \frac{\sin \alpha_i}{\cos \varphi_i} \sin \varphi_i = s_0 V_i^3 \frac{\sin \alpha_i}{\cos \varphi_i} \sin \varphi_i = \Delta L_i \sin \varphi_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

Формулы для вычислений значений текущих переменных представлены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 - Значения текущих переменных φ_i и α_i при вычислениях способом Рунге-Кутты-Ингганда

i	φ_i	α_i
1	B_1	A_1
2	$B_1 + \frac{1}{2}\Delta B_1$	$A_1 + \frac{1}{2}\Delta A_1$
3	$B_1 + \frac{1}{4}(\Delta B_1 + \Delta B_2)$	$A_1 + \frac{1}{4}(\Delta A_1 + \Delta A_2)$
4	$B_1 + 2\Delta B_3 - \Delta B_2$	$A_1 + 2\Delta A_3 - \Delta A_2$

4. СИСТЕМА ПЛОСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ГАУССА-КРЮГЕРА

4.1 Применение плоских координат в геодезии

Конечной целью любых геодезических построений является определение положения геодезических пунктов на поверхности принятого референц-эллипсоида. Положение пунктов может быть определено в различных системах координат. В предыдущей главе были рассмотрены методы решения задач по определению взаимного положения точек на поверхности земного эллипсоида в системе геодезических координат.

Система геодезических координат имеет ряд достоинств: едина для всей поверхности Земли, удобна для решения научных задач высшей геодезии и поэтому в этой системе обычно обрабатывают геодезические сети 1 класса. Однако в практической деятельности (при проектировании и строительстве сооружений, при переносе проектов в натуру и т.д.) она неудобна. В этой системе взаимное положение точек выражается в угловых единицах; линейное значение этих единиц в разных точках разное в зависимости от широты места; направления меридианов, от которых отсчитываются азимуты не параллельны между собой; вычисления при помощи геодезических координат сложны и трудоемки.

Поэтому система эллипсоидальных геодезических координат применяется только при мелкомасштабном картографировании. При крупномасштабном картографировании и в повседневной геодезической практике удобнее применять систему плоских геодезических координат, так как она позволяет производить все вычисления по наиболее простым формулам геометрии и тригонометрии. Использование системы плоских прямоугольных координат облегчает выполнение топографических съемок и картосоставительных работ. Кроме того, практическое применение топографических планов и карт делается значительно более удобным, если на них нанесена сетка прямоугольных координат.

Для применения системы плоских прямоугольных координат необходимо поверхность эллипсоида изобразить на плоскости. Такое отображение его поверхности, выполненное по тому или иному математическому закону, называется **картографической проекцией** или просто **проекцией**. Детально различные способы проектирования поверхности эллипсоида на плоскость рассматриваются в курсе "Математическая картография".

Понятно, что поверхность эллипсоида не может быть развернута на плоскость без искажений. Искажения тем значительнее и тем сложнее учитываются, чем больше изображаемая территория. Поэтому на практике в геодезии стараются изображать на плоскости сравнительно небольшие участки земной поверхности, на которых искажения находятся в допустимых, легко вычисляемых и устанавливаемых заранее пределах. В этом заключается особенность геодези-

ческого использования картографических проекций и отличие от использования их в математической картографии, в которой изучают способы изображения всей поверхности земного эллипсоида или же больших ее частей. Другим отличием геодезических проекций является то, что они определяют условия точного переноса на плоскость отдельных элементов поверхности эллипсоида (точек, углов и линий), а не их совокупности в виде всей поверхности, как в картографии.

Математический закон отображения поверхности земного эллипсоида на плоскости в общем виде может быть представлен уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(B, L) \\ y &= f_2(B, L) \end{aligned} \right\} \text{ или} \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= F_1(X, Y) \\ y &= F_2(X, Y) \end{aligned} \right\}. \quad (4.2)$$

где x, y - плоские прямоугольные координаты точки на плоскости, выраженные как функции геодезических (B, L) или прямоугольных сфероидических координат (X, Y) этой точки на эллипсоиде.

Законов изображения поверхности эллипсоида на плоскости может быть бесконечное множество. Каждый закон определяется видом функций f_1, f_2 или F_1, F_2 в уравнениях (4.1). В зависимости от вида этих функций каждый раз будем получать разные искажения.

По характеру искажения проекции делятся на следующие классы:

1) **равноугольные** - такие, где в каждой точке сохраняется равенство углов в проекции и в натуре;

2) **равновеликие (эквивалентные)**, в которых площади фигур в проекции равны (или пропорциональны) площади этих фигур в натуре;

3) **равнопромежуточные** - в каждой точке по одному из главных направлений (x или y) сохраняется равенство отрезков в проекции и в натуре;

4) **произвольные** - это проекции, не обладающие перечисленными выше свойствами; они применяются при решении каких-либо специальных задач.

Функции f_1, f_2 или F_1, F_2 необходимо выбрать так, чтобы обеспечить:

1) всю территорию государства единой системой плоских прямоугольных координат для получения топографических планов в одной системе координат;

2) минимальное искажение поверхности эллипсоида при изображении ее на плоскости;

3) легкость и простоту учета искажений при безусловной точности и строгости учета этих искажений.

Последнее требование особенно важно при переходе от числовых значений геодезических координат на эллипсоиде к числовым значениям координат на плоскости. Поправки за перенос элементов геодезических сетей с эллипсоида на плоскость должны вычисляться с ошибками в 5-10 раз меньшими ошибок измерений.

В геодезической практике оказалось удобнее всего использовать равноугольные проекции, так как в них сохраняется равенство углов, а следовательно форма и подобие изображаемых фигур в их бесконечно малых частях.

Сформулированным выше требованиям удовлетворяет система прямоугольных координат Гаусса-Крюгера, основанная на принципе **конформного (равноугольного)** изображения эллипсоида на плоскости, которая была принята на территории СССР начиная с 1928 года

Краткая историческая справка

Известный немецкий ученый Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) в 1820-30 гг. для численной обработки Ганноверской триангуляции применил разработанную им конформную проекцию эллипсоида с постоянным масштабом на прямолинейном изображении одного из меридианов, но в печати ее не опубликовал. Известно лишь, что формулы проекции в окончательном виде он сообщил в частной научной переписке.

Теория проекции Гаусса впервые была опубликована О.Шрейбером в 1866 г. уже после смерти Гаусса.

Более обстоятельное изложение теории проекции Гаусса с детальной разработкой рабочих формул дал немецкий геодезист Л.Крюгер в своих работах, опубликованных в 1912 и 1919 гг. С тех пор эта проекция под названием конформной проекции Гаусса-Крюгера получила широкое распространение во многих странах.

Для удобства практического применения проекции Гаусса-Крюгера немецкий ученый Г.Баумгарт в 1919 г. предложил ввести трехградусные зоны, ко всем ординатам прибавлять 500 км, а перед ординатой ставить порядковый номер зоны, счет которых начинается от Гринвича.

В СССР система координат Гаусса-Крюгера была впервые применена Н.Г.Келлем при обработке триангуляции Кузбасса, а начиная с 1928г она была принята в качестве общесоюзной системы координат при топографо-геодезических работах. При этом были приняты предложения Г.Баумгарта, но вместо 3-градусных зон были установлены 6-градусные зоны.

В настоящее время в системе плоских прямоугольных координат выполняется обработка всех геодезических сетей, начиная с сетей второго класса и ниже, а также составляются топографические планы и карты всех масштабов до 1:1 000 000.

4.2 Сущность проекции Гаусса

Для понимания сущности проекции Гаусса рассмотрим характер свойственных ей искажений на примере изображения шара на плоскости в сравнении с равнопромежуточной проекцией И.Зольднера, как это сделано в [2].

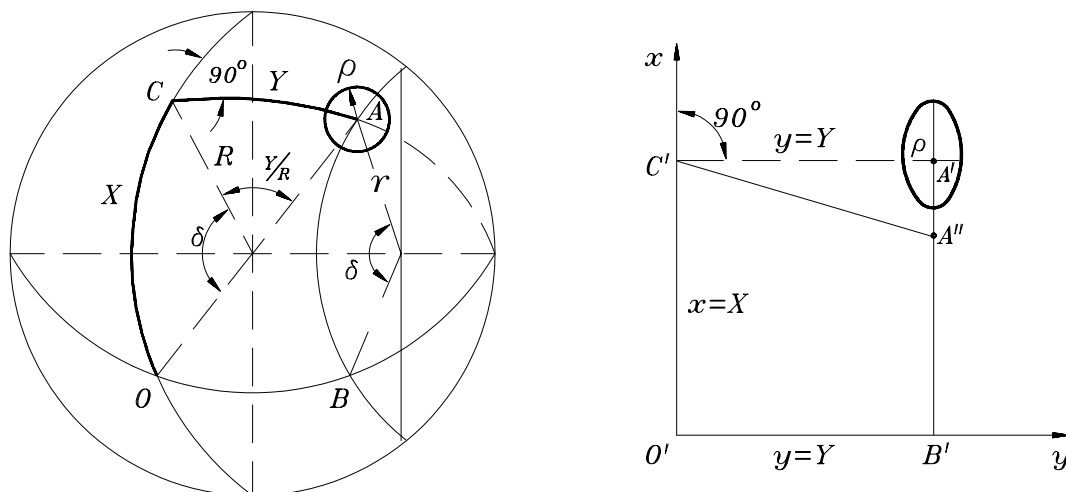


Рис.4.1

Пусть положение точки A на шаре радиуса R задано сферическими координатами X и Y (рис.4.1). Тогда закон проектирования выражается вторыми зависимостями (4.1)

Предположим, что проектирование производится под условием равенства сферических координат и плоских прямоугольных координат, т.е.

$$x = X; \quad y = Y. \quad (4.3)$$

Такой способ изображения поверхности шара на плоскости называется *проекцией Зольднера*.

Введем понятие: **Масштабом проекции** в данной точке по данному направлению называется отношение бесконечно малого отрезка в проекции к этому же отрезку в натуре (на эллипсоиде, на шаре). Это значит, что если в данной точке ds и dD - бесконечно малые отрезки соответственно на эллипсоиде и плоскости, то масштаб изображения равен

$$m = \frac{dD}{ds}. \quad (4.4)$$

В отличие от масштаба карт и планов масштаб проекции близок к 1.

Для выяснения характера искажений в проекции Зольднера возьмем на шаре бесконечно малый круг с радиусом ρ и центром в точке A и найдем его изображение на плоскости проекции.

Для изображения точки А на плоскости проведем взаимноперпендикулярные оси координат x и y . Отложим на этих осях от начала координат отрезки $x=X$ и $y=Y$. Получим точки C' и B' . В точке B' восстановим перпендикуляр к оси y и отложим отрезок $B'A''$ длина которого равна длине дуги BA . Соединим точки C' и A'' . Полученный отрезок $C'A''$ не перпендикулярен оси x , т.е. не выполняется условие прямоугольности. Для достижения прямоугольности надо точку A'' переместить в точку A' . Теперь условие прямоугольности выполнено и $x=X$, $y=Y$, но их надо откладывать по координатным осям.

Из рис.4.1 видно, что дугу BA при изображении ее на плоскости надо удлинить на величину $A'A''$. Таким образом, круг в точке A' на плоскости будет искажен и изображаться эллипсом.

Согласно уравнению (4.3) и выполненным построениям $y=Y$, т.е. масштаб проекции в направлении оси y будет равен $m_y = 1$.

Рассмотрим масштаб по оси x . По определению масштаба

$$m_x = \frac{A'B'}{\cup AB}. \quad (4.5)$$

Исходя из выполненных построений на рис.4.1, можем записать

$$A'B' = O'C' = \cup OC = R\delta. \quad (4.6)$$

Дуга AB является дугой малого круга и параллелью по отношению к дуге большого круга OC . Поэтому радиус дуги AB , как радиус параллели, можно выразить формулой

$$r = R \cos \frac{Y}{R}. \quad (4.7)$$

Тогда длина дуги будет

$$\cup AB = r\delta = R \cos \frac{Y}{R} \delta. \quad (4.8)$$

Подставим выражения (4.6) и (4.8) в формулу масштаба проекции в направлении оси x (4.5), получим

$$m_x = \frac{R\delta}{R \cos \frac{Y}{R} \delta} = \sec \frac{Y}{R}. \quad (4.9)$$

Так как Y/R - угол небольшой, разложим $\sec(Y/R)$ в ряд

$$m_x = 1 + \frac{Y^2}{2R^2} + \dots \quad (4.10)$$

Таким образом, $m_y = 1$, $m_x > 1$. Из-за этого круг на плоскости изображается эллипсом с полуосями

$$a = \rho \left(1 + \frac{Y^2}{2R^2} \right) \quad \text{и} \quad b = \rho.$$

Раз это так, то рассмотренная проекция (проекция Зольднера) приводит к искажению углов и длин линий. В этой проекции нет подобия фигур на плоскости и на шаре, а масштаб меняется не только при переходе от точки к точке, но и в одной точке по разным направлениям.

Для достижения равноугольности изображения поверхности шара (эллипсоида) на плоскости необходимо, чтобы масштаб проекции оставался постоянным по всем направлениям, тогда эллипс превратится в окружность.

В связи с этим в проекции Гаусса требуется

$$m_x = m_y = 1 + \frac{Y^2}{2R^2} + \dots \quad (4.11)$$

Это приводит к тому, что в проекции Гаусса увеличивается не только абсцисса, но и ордината.

С учетом выражения (4.11) уравнения проекции Гаусса для шара в функции прямоугольных сферических координат будут иметь вид

$$x = X; \quad (4.12)$$

$$y = \int_0^Y m dY = \int_0^Y \left(1 + \frac{Y^2}{2R^2} \right) dY = Y + \frac{Y^3}{6R^2}. \quad (4.13)$$

При изображении поверхности эллипсоида на плоскости подобные уравнения будут значительно сложнее.

Система координат Гаусса-Крюгера вполне определяется следующими условиями:

- 1) изображение на плоскости равноугольное;
- 2) осевой меридиан изображается прямой линией, принимаемой за ось абсцисс; началом координат служит изображение точки пересечения начального меридиана с экватором;
- 3) масштаб вдоль среднего (осевого) меридиана постоянный и принят равным единице.

4.3 Деление поверхности земного эллипсоида на зоны

Как уже отмечалось, применение системы плоских координат целесообразно, если искажения на плоскости проекции в пределах изображаемого участка будут незначительными. Из формулы (4.11) следует, что масштаб проекции быстро возрастает по мере удаления от осевого меридиана. С увеличением масштаба возрастает искажение длин конечных отрезков. Поэтому применение системы координат Гаусса-Крюгера для обработки геодезических измерений целесообразно только для сравнительно узких полос поверхности эллипсоида. В соответствии с этим поверхность эллипсоида делится меридианными плоскостями на зоны.

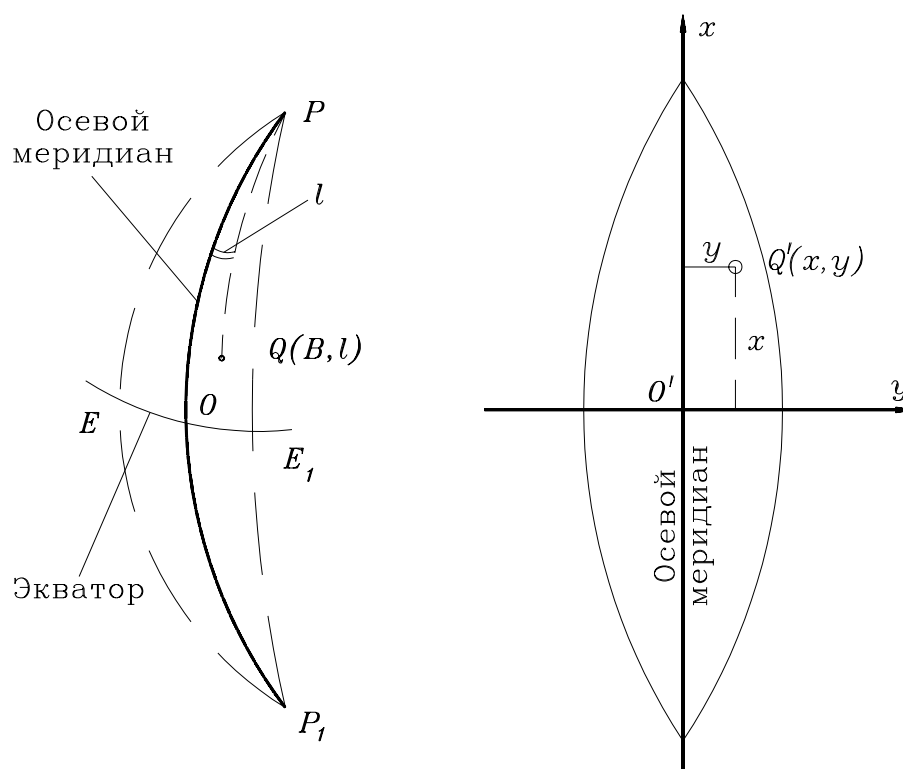


Рис.4.2

Каждая координатная зона представляет собой сфероидический двугольник с самостоятельной системой координат (рис.4.2). Осями ее являются средний меридиан и экватор. Положение точки Q на эллипсоиде в каждой зоне определяется широтой B , отсчитываемой от экватора к северу и к югу, и долготой l , отсчитываемой от осевого меридиана к западу и к востоку. Средний меридиан каждой зоны называется осевым, а ограничивающие зону меридианы - граничными (рис.4.3). Каждая зона изображается на плоскости независимо от остальных,

образуя самостоятельную систему координат. Осями абсцисс и ординат в каждой зоне служат изображения ее осевого меридиана и экватора. Началом координат служит точка пересечения осевого меридиана с экватором. Изображение точки Q на плоскости определяется прямоугольными координатами x и y , причем абсциссы отсчитываются к северу и югу от экватора, а ординаты - от осевого меридиана со знаком плюс к востоку и со знаком минус - к западу от него. Если будут даны плоские координаты какой-то точки $Q'(x,y)$, то этого недостаточно. Необходимо указать еще номер координатной зоны или долготу осевого меридиана зоны, в которой расположена данная точка.

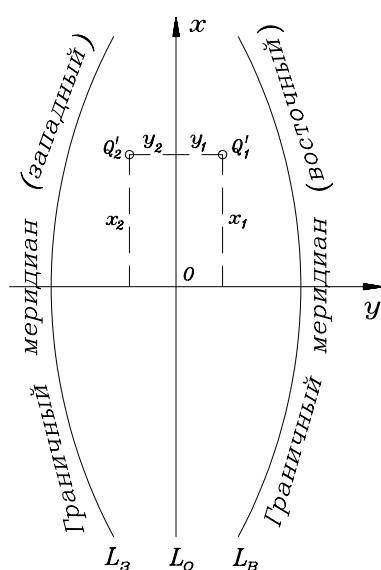


Рис.4.3

Для проекции Гаусса имеет место симметричность изображения относительно осевого меридиана. Двум точкам Q_1 и Q_2 на поверхности эллипсоида с одинаковыми широтами $B_1 = B_2$ и одинаковой абсолютной разностью долгот $|l_1| = L_1 - L_0$, $|l_2| = L_2 - L_0$ будут соответствовать две точки Q'_1 и Q'_2 на плоскости проекции с равными абсциссами $x_1 = x_2$ и одинаковыми по абсолютной величине ординатами $|y_1| = |y_2|$ (рис.4.3).

В нашей стране ширина зон по долготу установлена в 6° и 3° и приняты следующие правила разбивки на зоны.

Шестиградусные зоны.

Осевой меридиан проходит по середине зоны и его долгота кратна 3° , но не кратна 6° , а именно $3, 9, 15^\circ$... и т.д.

Для вычисления долготы осевого меридиана L_0 и номера координатной зоны N можно воспользоваться формулами

$$L_{0,6} = 6^\circ N - 3^\circ, \quad (4.14)$$

$$N = \frac{L_{0,6} + 3^\circ}{6^\circ}. \quad (4.15)$$

На территории Украины осевые меридианы имеют долготы: $21, 27, 33, 39$ градусов, а номера зон - 4, 5, 6, 7 (рис.4.4).

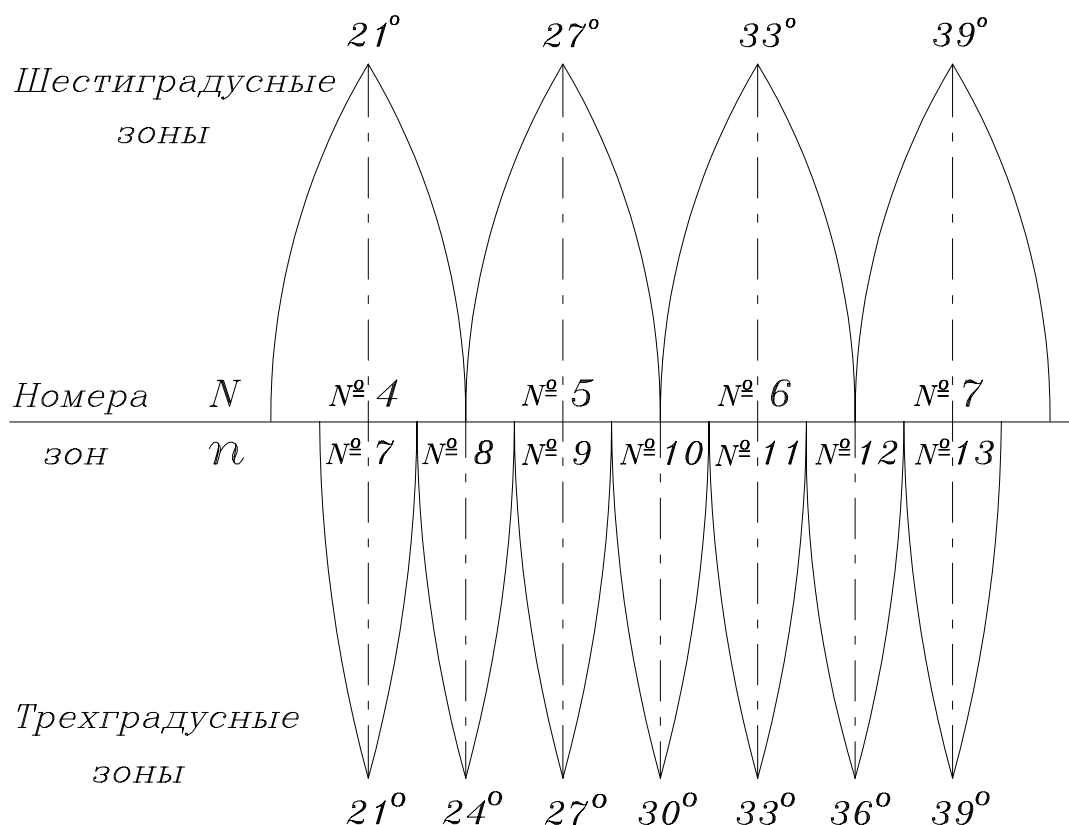


Рис.4.4

Точка пересечения экватора с граничным меридианом шестиградусной зоны имеет максимальное значение ординаты y в пределах зоны, равное

$$y_{max} = \frac{l_{max}}{\rho} R = \frac{3^{\circ}}{57.3^{\circ}} 6378 \approx 334 \text{ км.}$$

Масштаб проекции в этой точке также достигает своего максимального значения $m_{max} \approx 1,00137$, что соответствует относительному искажению длин 1:745.

На территории Украины, расположенной выше параллели 44° , $y_{max} \approx 236$ км, что соответствует максимальному значению масштаба 1,00068 и относительному искажению длин порядка 1:1470.

При указанной разбивке территория шестиградусной зоны совпадает с колонной карты масштаба 1:1 000 000, а номер зоны N отличается на 30 от номера соответствующей колонны листов карт, т.к. номер зоны начинается от Гринвичского меридиана, а счет колонн карт от меридиана с долготой 180° .

Чтобы избежать отрицательных значений ординат, условно принято считать для начала координат каждой зоны $x_0 = 0$, $y_0 = 500$ км. Кроме того, к ординате приписывается слева номер ее координатной зоны. Тогда условное или приведенное значение y равно:

$$\bar{y} = N \cdot 1000000\text{м} + 500000\text{м} + y. \quad (4.16)$$

Пусть, например, для некоторой точки имеем $\bar{y} = 7\,410\,453.132$, следовательно, эта точка расположена в западной части седьмой зоны и ее неприведенная ордината

$$\bar{y} = 410453.132 - 500000 = -89546.868 \text{ м.}$$

Координаты пунктов, вычисленные в системе шестиградусных зон, предназначены для планового обоснования топографических съемок в масштабах 1:10000, 1:25000 и мельче.

Трехградусные зоны.

Осевой меридиан трехградусной зоны кратен 3° . Осевые меридианы первой трехградусной зоны и первой шестиградусной зоны совпадают. Поэтому

$$L_{0,3} = 3^\circ n, \quad (4.17)$$

где n - номер трехградусной зоны.

На территории Украины осевые меридианы трехградусных зон имеют следующие долготы: 21,24,27,30,33,36,39 градусов (рис 4.4).

Максимальные искажения в пределах трехградусной зоны в 4 раза меньше искажений шестиградусной зоны.

В связи с этим в системе трехградусных зон вычисляются координаты пунктов съемочного обоснования топографических съемок масштабов 1:5000, 1:2000 и крупнее. В частности, в этой системе вычисляются городские геодезические сети и сети, являющиеся обоснованием строительства инженерных объектов.

В системе трехградусных зон к ординатам 500 км не прибавляется и не приписывается номер зоны.

Условные системы координат.

В отдельных случаях (при строительстве крупных объектов, особенно в сфере приложения инженерной геодезии) при обработке геодезических сетей выбирают условный осевой меридиан, который не совпадает с осевыми меридианами трех- и шестиградусных зон. Это делается для того, чтобы уменьшить искажения длин при переходе с эллипсоида на плоскость.

Так, при уравнивании и вычислении координат тоннельной триангуляции, создаваемой при строительстве метрополитенов, условно принимают положение осевого меридиана так, чтобы суммарная поправка в расстояние за переход

на плоскость и поверхность относимости была меньше 1:100000. Поэтому осевой меридиан не должен находиться далее, чем на 40 км от сооружаемого тоннеля.

4.4 Сущность задач, возникающих при переходе с поверхности эллипсоида на плоскость проекции

Общий порядок перехода с эллипсоида на плоскость следующий. Пусть на эллипсоиде имеется треугольник триангуляции DCQ (рис.4.5). Исходный пункт D имеет геодезические координаты B и l , где $l = L - L_0$; L и L_0 - долготы точки D и осевого меридиана зоны, в которой расположен треугольник. Длина исходной стороны DQ равна S ; DH - меридиан точки D; угол HDQ= A представляет собой

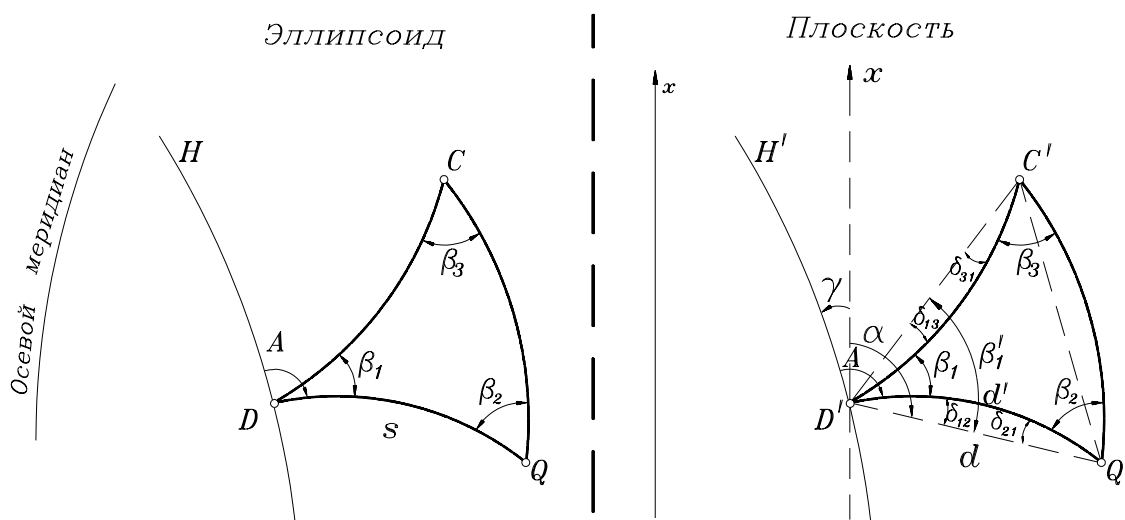


Рис.4.5

геодезический азимут исходной стороны DQ.

На плоскости в проекции Гаусса-Крюгера осевой меридиан изобразится прямой линией - осью x . Точка D изобразится точкой D' с прямоугольными координатами x и y . Геодезические линии, образующие треугольник, изобразятся в виде кривых D'C', C'Q', Q'D', обращенных выпуклостью от оси абсцисс. Углы между этими кривыми в силу равноугольности проекции Гаусса будут равны соответствующим углам $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ между линиями на поверхности эллипсоида.

Однако решение криволинейных треугольников на плоскости представляет большое неудобство. Поэтому их превращают в прямолинейные, соединяя кон-

цы дуг хордами (пунктирные линии на рис.4.5). Для перехода от сферических углов β_i к углам между хордами β'_i достаточно учесть небольшие поправки δ , называемые поправками за кривизну изображения геодезических линий на плоскости или редукциями горизонтальных направлений. Так например, угол между хордами D'C' и D'Q' равен

$$\beta'_1 = \beta_1 + \delta_{12} - \delta_{13} \quad (4.18)$$

(δ_{13} - имеет знак минус)

Стороны криволинейного треугольника на плоскости d'_i будут больше соответствующих сторон на эллипсоиде, т.е. $d'_i > S_i$. Учет искажений линий осуществляется введением в длину линии на эллипсоиде специальной поправки ΔS - редукции расстояний. При этом из-за малости расхождения длину кривой d' не отличают от длины хорды d и полагают, что длина линии на плоскости равна

$$d = S + \Delta S. \quad (4.19)$$

Меридиан DH изобразится на плоскости в виде кривой D'H'. Азимут A геодезической линии DQ будет равен на плоскости углу между изображениями меридиана D'H' и геодезической линии D'Q', т.е. он тоже изобразится без искажения. Угол γ между проекцией меридиана и линией, параллельной оси x , называется сближением меридианов на плоскости или гауссовым сближением меридианов. Переход от азимута к дирекционному углу исходной стороны осуществляется по формуле

$$\alpha = A - \gamma + \delta_{12}. \quad (4.20)$$

Плоское сближение меридианов γ вычисляют либо по геодезическим координатам B и L либо по плоским координатам x и y .

Поправки δ и ΔS вычисляют по приближенным плоским координатам, которые находят используя неисправленные длины и сферические углы.

4.5 Условия конформного изображения поверхности эллипсоида на плоскости

Учитывая, что проекция Гаусса-Крюгера является конформной, определим условия конформности, т.е. определим вид функции f_1 и f_2 в уравнениях (4.1).

Пусть точка А (рис.4.6) является изображением на плоскости некоторой точки, дуга АВ - изображение дифференциала дуги меридиана ($L=\text{const}$), а дуга АС - изображение дуги параллели ($B=\text{const}$).

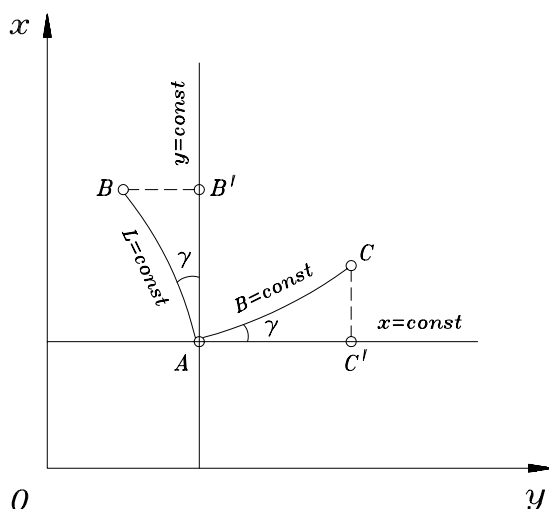


Рис.4.6

Угол γ представляет собой один и тот же угол поворота конформного изображения как меридиана, так и параллели относительных координатных линий x и y . Этот угол является сближением меридианов на плоскости. Он отсчитывается от оси x и или y в направлении против хода часовой стрелки.

Из подобных треугольников ABC' и ACC' можем записать

$$\left. \begin{aligned} \frac{AB'}{AB} &= \frac{AC'}{AC} = \cos \gamma, \\ \frac{BB'}{AB} &= \frac{CC'}{AC} = \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Найдем значения сторон этих треугольников.

В соответствии с определением масштаба проекции запишем

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \frac{AB}{\Delta X_{AB}} = \frac{AB}{MdB}, \\ m_y &= \frac{AC}{\Delta Y_{AC}} = \frac{AC}{N \cos B dL}, \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

где ΔX_{AB} и ΔY_{AC} - соответственно малые дуги меридиана и параллели.

Принимая во внимание, что масштаб проекции не зависит от направления, два последние выражения можем переписать в одно:

$$m = \frac{AB}{MdB} = \frac{AC}{N \cos B}, \quad (4.23)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} AB &= mMdB, \\ AC &= mN \cos BdL. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Из общего уравнения проекции (4.1) напомним полные дифференциалы плоских координат

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial L} dL, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial B} dB + \frac{\partial y}{\partial L} dL. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Для дуги меридиана, когда $L = \text{const}$ и вторые члены в уравнениях (4.25) будут равны 0, получим

$$\left. \begin{aligned} dx_{AB} &= AB' = \frac{\partial x}{\partial B} dB, \\ dy_{AB} &= BB' = -\frac{\partial y}{\partial B} dB. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Аналогично для изображения дуги параллели, т.е. $B = \text{const}$, первые члены в уравнениях (4.25) будут равны 0

$$\left. \begin{aligned} dx_{AC} &= CC' = \frac{\partial x}{\partial L} dL, \\ dy_{AC} &= AC' = \frac{\partial y}{\partial L} dL. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Теперь подставим значения сторон, определяемые формулами (4.24), (4.26), (4.27) в равенства (4.21). Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\frac{\partial x}{\partial B} dB}{mMdB} &= \frac{\frac{\partial y}{\partial L} dL}{mN \cos BdL} = \cos \gamma, \\ -\frac{\frac{\partial y}{\partial B} dB}{mMdB} &= \frac{\frac{\partial x}{\partial L} dL}{mN \cos BdL} = \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Из этих соотношений находим прежде всего

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= \frac{M}{N \cos B} \frac{\partial y}{\partial L}, \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= -\frac{M}{N \cos B} \frac{\partial x}{\partial L}. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Дифференциальные уравнения (4.29) являются теми условиями, которым должны удовлетворять функции (4.1) при конформном изображении эллипсоида на плоскости.

Для получения формул вычисления сближения меридианов и масштаба перепишем формулы (4.28) следующим образом

$$m \sin \gamma = -\frac{1}{M} \frac{\partial y}{\partial B} = \frac{1}{N \cos B} \frac{\partial x}{\partial L},$$

$$m \cos \gamma = \frac{1}{M} \frac{\partial x}{\partial B} = \frac{1}{N \cos B} \frac{\partial y}{\partial L}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-\left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)}; \quad (4.30)$$

$$m = \frac{1}{M} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)^2} = \frac{1}{N \cos B} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2}. \quad (4.31)$$

4.6 Вычисление плоских координат по геодезическим координатам

Проекция Гаусса-Крюгера является симметричной относительно оси x . Уравнения изображения всех симметричных проекций при малой величине разности долгот l можно представить в виде следующих рядов [3]

$$x = X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 + a_8 l^8 + \dots$$

$$y = b_1 l + b_3 l^3 + b_5 l^5 + b_7 l^7 + \dots \quad (4.32)$$

Коэффициенты в этих рядах представляют собой функции только широты B . Характерным признаком уравнений симметричных проекций является то, что уравнение абсциссы состоит из членов только четной степени разности долгот, а уравнение ординаты - из членов только нечетной степени этой разности. Уравнения (4.32) характерны для целого ряда симметричных проекций. Для проекции Гаусса-Крюгера они должны удовлетворять условиям конформности (4.29).

Выразим частные производные рядов (4.32)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= \frac{dX}{dB} + \frac{da_2}{dB} l^2 + \frac{da_4}{dB} l^4 + \frac{da_6}{dB} l^6 + \frac{da_8}{dB} l^8 + \dots \\ \frac{\partial x}{\partial L} &= 2a_2 l + 4a_4 l^3 + 6a_6 l^5 + 8a_8 l^7 + \dots \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= \frac{db_1}{dB} l + \frac{db_3}{dB} l^3 + \frac{db_5}{dB} l^5 + \frac{db_7}{dB} l^7 + \dots \\ \frac{\partial y}{\partial L} &= b_1 + 3b_3 l^2 + 5b_5 l^4 + 7b_7 l^6 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

и подставим их в дифференциальные уравнения (4.29)

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dB} + \frac{da_2}{dB} l^2 + \frac{da_4}{dB} l^4 + \dots &= \frac{M}{N \cos B} (b_1 + 3b_3 l^2 + 5b_5 l^4 + 7b_7 l^6 + \dots), \\ \frac{db_1}{dB} l + \frac{db_3}{dB} l^3 + \frac{db_5}{dB} l^5 + \dots &= -\frac{M}{N \cos B} (2a_2 l + 4a_4 l^3 + 6a_6 l^5 + \dots). \end{aligned}$$

Сравнивая между собой в этих равенствах коэффициенты при одинаковых степенях l , находим

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dB} &= \frac{M}{N \cos B} b_1, & b_1 &= \frac{N \cos B}{M} \frac{dX}{dB}, \\ \frac{\partial b_1}{\partial B} l &= -\frac{2M}{N \cos B} a_2 l, & a_2 &= \frac{-N \cos B}{M} \frac{db_1}{dB}, \\ \frac{\partial a_2}{\partial B} l^2 &= -\frac{2M}{N \cos B} b_3 l^2, & b_3 &= \frac{N \cos B}{3M} \frac{da_2}{dB}, \\ \frac{\partial b_1}{\partial B} l^3 &= -\frac{4M}{N \cos B} a_4 l^3, & a_4 &= \frac{-N \cos B}{4M} \frac{db_3}{dB}, \end{aligned}$$

и т.д.

Анализируя правый столбец приведенных формул, видно, что для получения каждого последующего коэффициента необходимо найти производную предыдущего коэффициента.

Учитывая, что $\frac{dX}{dB} = M$, первый коэффициент равен

$$b_1 = \frac{N \cos B}{M} M = N \cos B.$$

Принимая во внимание формулы (1.12) и (1.18) можно записать

$$\frac{dr}{dB} = \frac{d(N \cos B)}{dB} = \frac{db_1}{dB} = -M \sin B.$$

Тогда

$$a_2 = \frac{1}{2} N \sin B \cos B.$$

Аналогичным образом находят значения остальных коэффициентов.

Приведем окончательные формулы для вычисления коэффициентов в рядах (4.32)

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2} N \sin B \cos B, \\ a_4 &= \frac{1}{24} N \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4), \\ a_6 &= \frac{1}{720} N \sin B \cos^5 B (61 - 58\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 270\eta^2 - 330\eta^2 \operatorname{tg}^2 B), \\ a_8 &= \frac{1}{40320} N \sin B \cos^7 B (1385 - 3111\operatorname{tg}^2 B + 543\operatorname{tg}^4 B - \operatorname{tg}^6 B), \\ b_1 &= N \cos B, \\ b_3 &= \frac{1}{6} N \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2), \\ b_5 &= \frac{1}{120} N \cos^5 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 14\eta^2 - 58\eta^2 \operatorname{tg}^2 B), \\ b_7 &= \frac{1}{5040} N \cos^7 B (61 - 479\operatorname{tg}^2 B + 179\operatorname{tg}^4 B - \operatorname{tg}^6 B). \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Ряды (4.32) и коэффициенты (4.32) обеспечивают в плоских координатах точность 0.01м при разности долгот $l=9^\circ$.

При $B=0^\circ$ все коэффициенты a_2, a_4, a_6, a_8 будут равными нулю, следовательно, $x=0$. Это означает, что экватор ($B=0^\circ$) изображается в проекции Гаусса-Крюгера прямой линией - осью ординат.

Для точек, лежащих на осевом меридиане $l=0^\circ$, ордината $y=0$, а абсцисса равна длине дуги меридиана $x=X$. Величина X в рядах (4.32) является длиной дуги меридиана от экватора до точки, имеющей широту B , и вычисляется по формуле (1.37).

4.7 Вычисление геодезических координат по плоским прямоугольным

Для обратного перехода от геодезических координат должны существовать функции

$$B = \varphi_1(x, y), \quad L = \varphi_2(x, y). \quad (4.35)$$

Эти функции при конформном изображении должны удовлетворять условиям, которые выражаются дифференциальными уравнениями, полученными из (4.29)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{N \cos B}{M} \frac{\partial L}{\partial y}, \\ \frac{\partial B}{\partial y} &= -\frac{N \cos B}{M} \frac{\partial L}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Функции (4.35) представим в виде рядов по степеням ординаты y , полагая ее малой величиной

$$\left. \begin{aligned} B &= B_X + A_2 y^2 + A_4 y^4 + A_6 y^6 + A_8 y^8 + \dots \\ L &= B_1 y + B_3 y^3 + B_5 y^5 + B_7 y^7 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Все коэффициенты в этих рядах представляют собой функции только абсциссы x . Для удобства вычислений в качестве аргумента вместо абсциссы x используют соответствующую ей величину B_X .

Из формулы (4.37) следует, что при $y=0$ величина B_X представляет собой широту точки Q_X (рис.4.7); плоскими координатами этой точки являются x и $y=0$, а геодезическими - B_X и $l=0$.

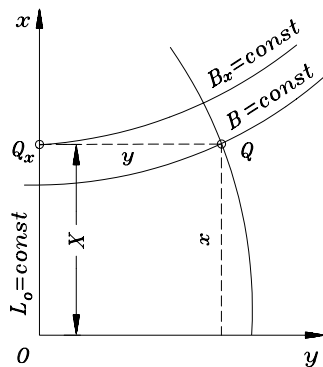


Рис.4.7

Абсцисса точки Q_X , т.е. отрезок QQ_X равняется длине дуги меридиана X от экватора до точки Q_X , т.к. по условию проекции масштаб по осевому меридиану равен единице. Поэтому широту B_X можно найти как функцию длины дуги меридиана по формуле (1.40), принимая $X=x$.

Вывод формул коэффициентов A_i , B_i в рядах (4.37) производится таким же путем, как и коэффициентов a_i , b_i в рядах (4.32), но с учетом уравнений (4.36). Здесь приведем окончательные формулы:

$$\left. \begin{aligned}
A_2 &= -\frac{V_X^2 \operatorname{tg} B_X}{2N_X^2}, \\
A_4 &= -\frac{A_2}{12N_X^2} \left(5 + 3\operatorname{tg}^2 B_X + \eta_X^2 - 9\eta_X^2 \operatorname{tg}^2 B_X - 4\eta_X^4 \right), \\
A_6 &= \frac{A_2}{360N_X^4} \left(61 + 90\operatorname{tg}^2 B_X + 45\operatorname{tg}^4 B_X + 46\eta_X^2 - 252\eta_X^2 \operatorname{tg}^2 B_X - \right. \\
&\quad \left. - 90\eta_X^4 \operatorname{tg}^4 B_X \right), \\
A_8 &= -\frac{A_2}{20160N_X^6} \left(1385 + 3633\operatorname{tg}^2 B_X + 4095\operatorname{tg}^4 B_X + 1575\operatorname{tg}^6 B_X \right), \\
B_1 &= \frac{1}{N_X \cos B_X}, \\
B_3 &= -\frac{B_1}{6N_X^2} \left(1 + 2\operatorname{tg}^2 B_X + \eta_X^2 \right), \\
B_5 &= \frac{B_1}{120N_X^4} \left(5 + 28\operatorname{tg}^2 B_X + 24\operatorname{tg}^4 B_X + 6\eta_X^2 + 8\eta_X^2 \operatorname{tg}^2 B_X \right), \\
B_7 &= -\frac{B_1}{5040N_X^6} \left(61 + 622\operatorname{tg}^2 B_X + 1320\operatorname{tg}^4 B_X + 720\operatorname{tg}^6 B_X \right).
\end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Величины N_X , V_X , η_X вычисляются по широте B_X . Координаты B и l , определяемые по формулам (4.37), (4.38) получаются в радианах. Точность вычислений по ним соответствует точности формул (4.32), (4.34).

4.8 Вычисление сближения меридианов

Для вычисления сближения меридианов воспользуемся второй формулой (4.30), так как частные производные по долготе найти проще, чем по широте

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial L} \right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial L} \right)}. \quad (4.39)$$

Продифференцируем выражения (4.32) по долготе

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial L} &= 2a_2 l + 4a_4 l^3 + 6a_6 l^5 + \dots \\ \frac{\partial y}{\partial L} &= b_1 + 3b_3 l^2 + 5b_5 l^4 + 7b_7 l^6 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Подставим в выражения частных производных коэффициенты (4.34) и, ограничиваясь членами, содержащими множитель l^5 , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial L} &= N \sin B \cos B l + \frac{N}{6} \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4) l^3 + \\ &\quad + \frac{N}{120} \sin B \cos^5 B (61 - 58\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) l^5; \\ \frac{\partial y}{\partial L} &= N \cos B + \frac{N}{2} \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) l^2 + \\ &\quad + \frac{N}{24} \cos^5 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) l^4. \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Применяя разложение в ряд

$$\frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

ограничиваясь учетом членов, содержащих множитель l^5 , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial L}} &= \frac{1}{N \cos B} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos^2 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) l^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} \cos^4 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) l^4 \right\}^{-1} = \\ &= \frac{1}{N \cos B} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cos^2 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) l^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} \cos^4 B (1 + 6\operatorname{tg}^2 B + 5\operatorname{tg}^4 B) l^4 \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Используя формулы (4.39), (4.41), (4.42), выполнив умножение и приведение подобных членов, получим, пренебрегая в последнем слагаемом величинами, содержащими η^2

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma = l \sin B \left\{ 1 + \frac{l^2}{3} \cos^2 B (1 + \operatorname{tg}^2 B + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \right. \\ \left. + \frac{l^4}{15} \cos^4 B (2 + 4\operatorname{tg}^2 B + 2\operatorname{tg}^4 B) \right\} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Знак сближения меридианов совпадает со знаком разности долгот $l = L - L_0$. Очевидно, что для точек, расположенных к востоку от осевого меридиана, сближение меридианов всегда будет иметь знак плюс, а к западу - минус.

Если заданы плоские координаты, то наиболее рациональной будет следующая последовательность вычислений: вначале определяются геодезические координаты B и l , а затем применяется уравнение (4.43).

Для приближенного определения сближения (с точностью до одной минуты) достаточно ограничиться первым слагаемым в выражении (4.43). Тогда

$$\gamma' = l' \sin B \quad (4.44)$$

Если же заданы плоские координаты, то предварительно находят широту B с точностью до $1'$ (по крупномасштабной карте), а затем применяют формулу

$$\gamma' = y \frac{\rho}{a} \operatorname{tg} B = 0.539 y_{(км)} \operatorname{tg} B, \quad (4.45)$$

где a - большая полуось эллипсоида;

y - абцисса относительно осевого меридиана зоны.

4.9 Масштаб в проекции Гаусса-Крюгера

Масштаб изображения является важнейшей характеристикой любой конформной проекции. Зная формулу масштаба, можно установить величины и распределение линейных искажений в пределах изображаемой области.

Для вывода формулы масштаба воспользуемся второй формулой из (4.31), которую запишем в следующем виде:

$$m^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial L} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L} \right)^2 \right] \frac{1}{N^2 \cos^2 B}. \quad (4.46)$$

В производных (4.41) сохраним только члены порядка l^4 , тогда

$$\frac{\partial x}{\partial L} \frac{1}{N \cos B} = l \sin B + \frac{l^3}{6} \sin B \cos^2 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4),$$

$$\frac{\partial y}{\partial L} \frac{1}{N \cos B} = 1 + \frac{l^2}{2} \cos^2 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) + \frac{l^4}{24} \cos^4 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B).$$

Возведем каждое из этих выражений в квадрат и сложим их. Тогда получим с принятой выше точностью

$$m^2 = l^2 \sin^2 B + \frac{l^4}{3} \sin^2 B \cos^2 B (5 - \operatorname{tg}^2 B) +$$

$$+ 1 + \frac{l^2}{2} \cos^2 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) + \frac{l^4}{4} \cos^4 B (1 - 2\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) +$$

$$+ \frac{l^4}{4} \cos^4 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B).$$

Заменив $\sin^2 B$ на $\cos^2 B \operatorname{tg}^2 B$ и приведя подобные члены, будем иметь

$$m^2 = 1 + \cos^2 B (1 + \eta^2) l^2 + \cos^4 B (8 - 4\operatorname{tg}^2 B) \frac{l^4}{12}. \quad (4.47)$$

Для извлечения квадратного корня применим выражение

$$\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$m^2 = 1 + \cos^2 B (1 + \eta^2) \frac{l^2}{2} + \cos^4 B (5 - 4\operatorname{tg}^2 B) \frac{l^4}{24}.$$

Из данного выражения видно, что при $l=0^\circ$, т.е. на оси абсцисс, **масштаб равен единице во всех точках**. По мере удаления от осевого меридиана к востоку и западу масштаб изображения быстро увеличивается.

Ранее была получена формула масштаба изображения в проекции Гаусса-Крюгера для шара (4.11). Более точное значение масштаба изображения в функции плоских координат дает для сфероида следующая формула, которую приведем без вывода

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} + \frac{y^6}{720R^6} + \dots \quad (4.48)$$

4.10 Вычисление поправок в направления за кривизну изображения

геодезической линии на плоскости (редукция направлений)

Как отмечалось ранее (см. подраздел 4.4), поправки в направления за кривизну изображения геодезической линии на плоскости обусловлены тем, что изображение геодезической линии на плоскости в виде некоторой кривой заменяется хордой.

Приближенное значение этих поправок δ можно получить следующим образом. Пусть на эллипсоиде имеем две точки Q_1 и Q_2 (рис.4.8). Через эти точки проведем геодезические линии Q_1C и Q_2D так, чтобы они пересекли осевой меридиан под углом 90° .

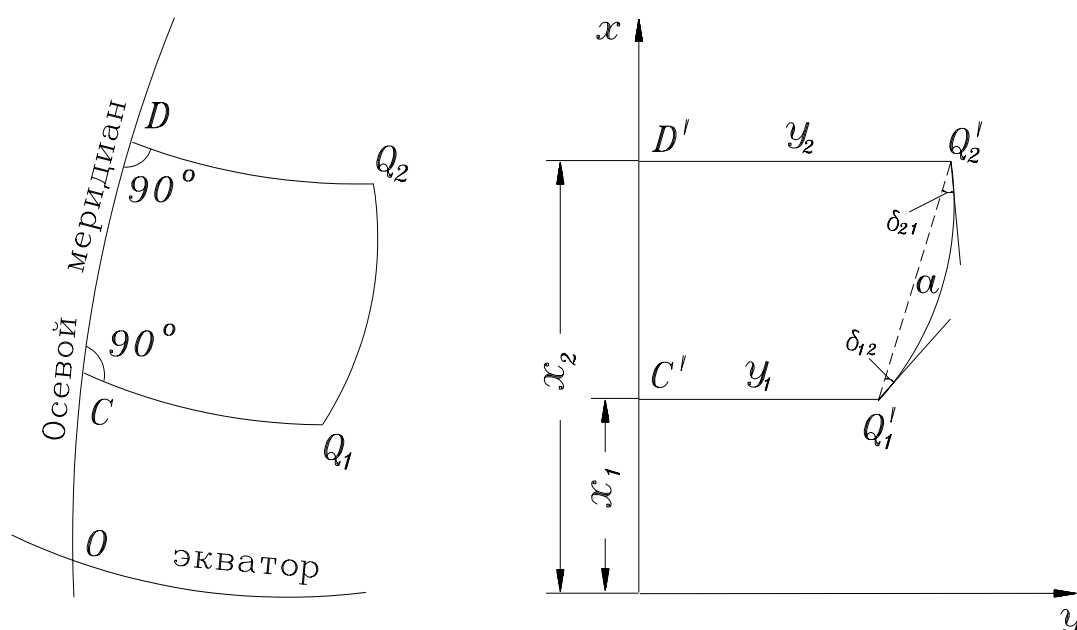


Рис.4.8

На плоскости геодезическая линия Q_1Q_2 изображается кривой $Q'_1aQ'_2$. Плоские координаты точек Q'_1 и Q'_2 обозначим соответственно через x_1, y_1 и x_2, y_2 , а углы в точках Q_1 и Q_2 между касательными к кривой и хордой $Q'_1Q'_2$ - через δ_{12} и δ_{21} .

В сфероидической трапеции Q_1Q_2CD сумма углов равна

$$\angle Q_1 + \angle Q_2 + \angle C + \angle D = 360^\circ + \varepsilon, \quad (4.49)$$

где ε - сферический избыток.

Ввиду равноугольности проекции углы в трапеции на плоскости будут равны углам на эллипсоиде

$$\angle Q'_1 + \angle Q'_2 + \angle C' + \angle D' = 360^\circ + \varepsilon. \quad (4.50)$$

Понятно, что $\angle C' + \angle D' = 180^\circ$, и следовательно

$$\angle Q'_1 + \angle Q'_2 = 180^\circ + \varepsilon. \quad (4.51)$$

Из этой формулы сделаем два заключения:

1) в общем случае дуга Q_1Q_2 на плоскости не может изобразиться прямой линией;

2) дуга на плоскости изображается некоторой кривой, которая выпуклостью всегда обращена от осевого меридиана.

Равенство (4.51) можно переписать следующим образом

$$\angle Q'_1 + \angle Q'_2 = 180^\circ + \delta_{12} + \delta_{21}, \quad (4.52)$$

тогда

$$\varepsilon = \delta_{12} + \delta_{21}. \quad (4.53)$$

Если обозначить через P площадь сфероидической трапеции, то сферический избыток равен

$$\varepsilon = \frac{P}{R^2} \rho''$$

или

$$\varepsilon = \frac{\rho''}{R^2} (x_2 - x_1) \frac{(y_2 + y_1)}{2} = \frac{\rho''}{R^2} (x_2 - x_1) y_m, \quad (4.54)$$

где $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$ - средняя ордината линии.

На основании (4.53) и (4.54)

$$\delta_{12} + \delta_{21} = \frac{\rho''}{R^2} (x_2 - x_1) y_m.$$

Полагая, что $|\delta_{12}| = |\delta_{21}|$, получим

$$\delta_{12} = -\delta_{21} = -\frac{\rho''}{R^2} (x_2 - x_1) y_m = -f(x_2 - x_1) y_m, \quad (4.55)$$

где $f = \frac{\rho''}{2R^2}$ - вычисляется аналогично (3.14)

Максимальная ошибка вычисления δ по формуле (4.55) при $S \leq 10$ км не более 0.03". Поэтому данная формула может применяться при обработке триангуляции 3 и 4 классов.

Для сетей 2 класса применяют более точные формулы

$$\left. \begin{aligned} \delta_{12} &= \frac{1}{3} f(x_1 - x_2)(2y_1 + y_2) \\ \delta_{21} &= -\frac{1}{3} f(x_1 - x_2)(2y_2 + y_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Эти формулы обеспечивают вычисление поправок δ с точностью до 0.01". Для сетей 1 класса, особенно при вычислении в шестиградусных зонах, формулы еще более сложные

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= \frac{(x_2 - x_1)}{2R_m^2} \rho'' \left(y_m - \frac{y_2 - y_1}{6} \right) - \frac{\rho''}{6R_m^4} y_m^3 (x_2 - x_1) + \\ &+ \frac{\rho''}{R_m^3} y_m^2 (y_2 - y_1) \eta_m^2 \operatorname{tg} B_m \end{aligned} \quad (4.57)$$

Поправки за кривизну изображения геодезической линии алгебраически прибавляют к измеренным направлениям.

Из формул (4.55)-(4.57) следует, что для определения редукций направлений необходимо знать координаты пунктов. Их вычисляют с точностью до 0.1м в триангуляции 1 класса и до 1м - в триангуляции 2 класса. Для триангуляции 3 и 4 классов приближенные координаты достаточно знать с точностью до десятков метров, поэтому их можно определить графически по схеме сети.

Установим связь между сферическими избытками треугольников и поправками за кривизну изображения. Пусть имеем треугольник 123 (рис.4.9) Обозначим:

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - углы на поверхности эллипсоида;

$\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ - углы между хордами на плоскости;

Рассматривая углы как разность двух направлений и обозначая поправку в угол через Δ_i можно записать

$$\beta'_1 = \beta_1 + (\delta_{12} - \delta_{13}) = \beta_1 + \Delta_1,$$

$$\beta'_2 = \beta_2 + (\delta_{21} - \delta_{23}) = \beta_2 + \Delta_2,$$

$$\beta'_3 = \beta_3 + (\delta_{32} - \delta_{31}) = \beta_3 + \Delta_3.$$

Суммируя почленно эти равенства, получим

$$\beta'_1 + \beta'_2 + \beta'_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \sum \Delta.$$

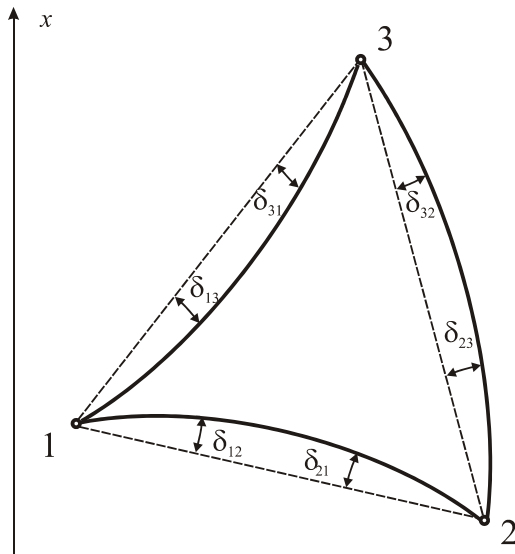


Рис.4.9

Но $\beta'_1 + \beta'_2 + \beta'_3 = 180^\circ$ - сумма углов плоского треугольника,

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 180^\circ + \varepsilon$ - сумма углов сферического треугольника, поэтому

$$\sum \Delta = -\varepsilon. \quad (4.58)$$

Формула (4.58) служит для контроля вычисления поправок редукций направлений и углов.

4.11 Проектирование на плоскость длин линий (редукция расстояний)

Задача состоит в переходе от длины геодезической линии S на поверхности эллипсоида к длине хорды d , проведенной через изображения конечных точек геодезической линии на плоскости проекции.

На рис.4.10 дуга ab - изображение геодезической линии на плоскости. Обозначим длину дуги через d' . Учитывая, что масштаб изображения зависит от координаты y , и в общем случае изменяется в каждой точке линии, то для вычисления длины дуги d' надо взять интеграл

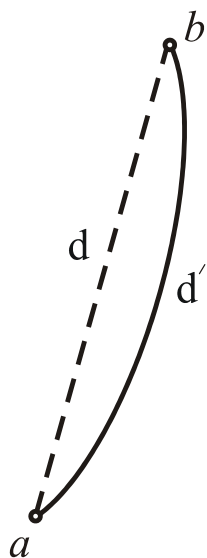


Рис.4.10

$$d' = \int_0^S m ds. \quad (4.59)$$

Согласно [2] максимальное расхождение в длине кривой d' и хорды d

$$\frac{d' - d}{d'} < 1:200\,000\,000.$$

Наиболее точное измерение длин в настоящее время производится со средней квадратической ошибкой 1:1000000 и поэтому во всех случаях можно принять $d'=d$. Учитывая это, можно записать

$$d = \int_0^S m ds, \quad (4.60)$$

Масштаб изображения является весьма сложной функцией длины геодезической линии. Поэтому найти неопределенный интеграл (4.56) в замкнутой форме - очень трудная задача.

Однако при незначительном удалении от осевого меридиана и при небольшой длине линии масштаб вдоль такой линии изменяется весьма медленно и

поэтому нахождение интеграла (4.60) может быть выполнено приближенными методами, например по способу Симпсона.

Используя формулу параболы, можем записать

$$d = \frac{S}{6}(m_1 + 4m_m + m_2), \quad (4.61)$$

где m_1, m_m, m_2 - масштабы проекций соответственно в начальной, средней и конечной точки геодезической линии.

Принимая $R_1 = R_2 = R_m$ запишем

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= 1 + \frac{y_1^2}{2R_m^2} + \frac{y_1^4}{24R_m^4}, \\ m_m &= 1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4}, \\ m_2 &= 1 + \frac{y_2^2}{2R_m^2} + \frac{y_2^4}{24R_m^4}. \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

Подставляя значения m_1, m_m, m_2 из (4.62) в формулу (4.61) и полагая, что

$$\begin{aligned} y_1 &= y_m - \frac{1}{2}\Delta y, & y_2 &= y_m + \frac{1}{2}\Delta y, \\ \Delta y &= y_2 - y_1, & y_1^2 + y_2^2 &= 2y_m^2 + \frac{1}{2}\Delta y^2, \end{aligned}$$

получим после преобразований

$$d = S \left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} \right). \quad (4.63)$$

Данную формулу применяют в триангуляции 1 класса. При вычислениях сетей 2 класса не учитывают последний член, который при длине линий до 20 км и $y=320$ км составляет всего лишь 0.005м. В сетях низших классов достаточно применять одну из следующих формул

$$d = S \left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} \right) = S + \frac{y_m^2}{2R_m^2} S = S + \Delta S, \quad (4.64)$$

$$\Delta S = 0.123 y_m^2 S. \quad (4.65)$$

4.12 Перевычисление координат из одной координатной

зоны в другую

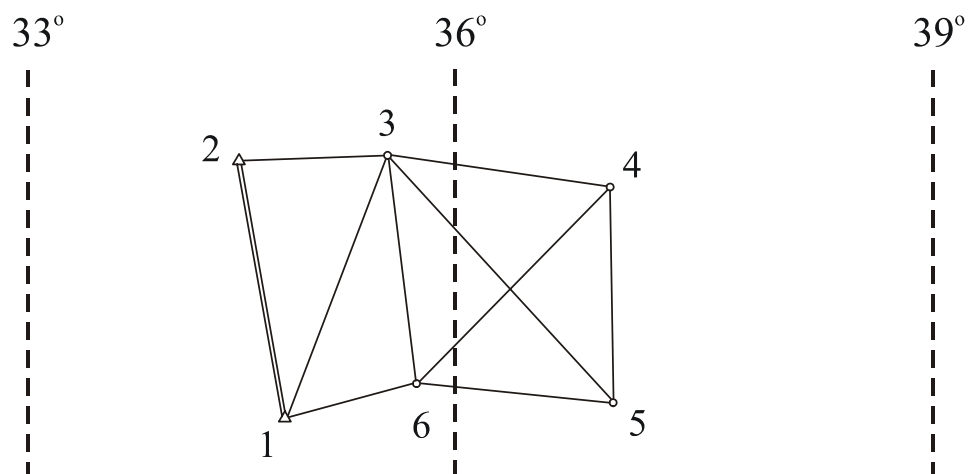
Задача по перевычислению координат из одной зоны в другую может возникнуть в следующих случаях.

1. Геодезическая сеть пересекает границу зон, располагаясь одновременно в двух зонах, как показано на рис.4.11,а. Уравнивание такой сети производится в системе координат той зоны, в которой расположено большее количество пунктов. Так, если сеть уравнивалась в зоне с осевым меридианом 33° , то после уравнивания координаты пунктов 4 и 5 должны быть вычислены в зоне с осевым меридианом 39° , в которой они расположены.

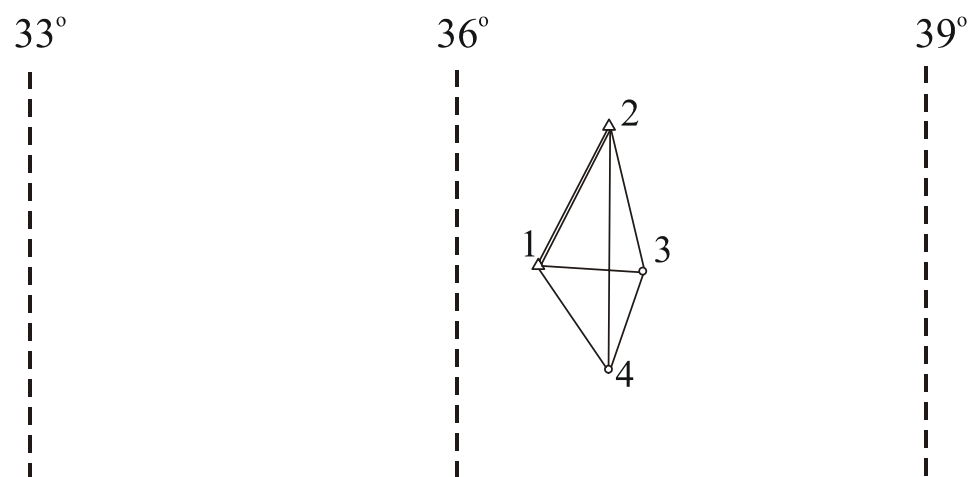
2. Геодезическая сеть создается у границы шестиградусной зоны и в силу больших линейных искажений необходимо перейти из шестиградусной зоны в трехградусную, осевой меридиан которой служит разделительным меридианом шестиградусных зон. На рис.4.11,б показана сеть, которая уравнена в шестиградусной зоне с осевым меридианом 39° , но в связи с тем, что она расположена у границы зоны, линейные искажения значительны. Для их уменьшения сеть можно перевычислить в систему трехградусной зоны с осевым меридианом 36° .

3. Иногда при специальных инженерных работах с целью обеспечения минимальных искажений длин и углов бывает целесообразно выбрать осевой меридиан так, чтобы он проходил через среднюю точку района работ. В этом случае необходимо перевычисление координат из зоны общегосударственной разграфки (3° и 6°) в зону с выбранным частным меридианом. Так для вычисления сети, представленной на рис.4.11,в, выбран условный осевой меридиан с дол-

а)



б)



в)

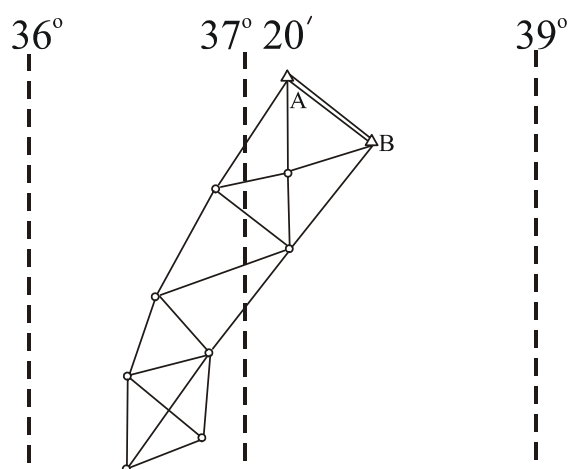


Рис.4.11

готой $37^{\circ} 20'$. Вначале необходимо координаты исходных пунктов А и В перевычислить из системы координат шестиградусной зоны с осевым меридианом 39° в систему координат с условным осевым меридианом $37^{\circ} 20'$. Сеть создается и используется в практической деятельности в данной условной системе. Однако при использовании пунктов этой сети для картографической и других целей, координаты пунктов необходимо иметь в общегосударственной системе. Поэтому возникает обратная задача, т.е. перевычисление координат из системы координат с осевым меридианом $37^{\circ} 20'$ в шестиградусную зону ($L_0=39^{\circ}$) и в трехградусную ($L_0=36^{\circ}$).

Существует несколько способов перевычисления координат пунктов из зоны в зону. Рассмотрим наиболее распространенные из них.

1.Способ перевычисления координат с промежуточным переходом к геодезическим координатам. Он является наиболее строгим и универсальным. Этот способ состоит в том, что от плоских координат пункта одной зоны переходят к его эллипсоидальным (геодезическим) координатам, а от них к плоским координатам другой зоны.

Пусть имеем плоские прямоугольные координаты x' и y' в зоне с осевым меридианом L'_0 . Необходимо перевычислить эти координаты в другую зону с осевым меридианом L''_0 .

Известным уже способом по x' и y' вычисляем геодезические координаты B и $L = L'_0 + l'$. По полученным координатам B и L , пользуясь разностью долгот $l'' = L - L''_0$ вычисляют координаты x'' и y'' в другой зоне.

Этот способ связан с большим объемом вычислений и поэтому раньше использовался для преобразования координат одного или нескольких пунктов. Но с внедрением ЭВМ, благодаря своей универсальности и высокой точности, он стал основным при перевычислении координат из зоны в зону.

2.Способы перевычисления с применением специальных таблиц имели большое распространение при ручном счете. Существует несколько разновидностей таблиц, позволяющих перейти от плоских прямоугольных координат x' и y' в одной зоне к плоским координатам этого же пункта x'' и y'' во второй зоне.

Наибольшее применение нашли следующие таблицы, составленные для эллипсоида Ф.Н.Красовского.

1.Вировец А.М., Рабинович Б.Н. "Таблицы для преобразования прямоугольных координат". М.,Геодезиздат,1950. Эти таблицы позволяют произвести перевычисления из трехградусной в смежную трехградусную зону, из трехградусной в шестиградусную и наоборот.

2.Бирюков Е.Е. "Таблицы для перевычисления прямоугольных координат Гаусса из одной шестиградусной зоны в другую шестиградусную зону", ВТУ Генштаба ВС СССР, 1947

3.Каган В.Л. "Таблицы для преобразования координат Гаусса-Крюгера из шестиградусной зоны в смежную шестиградусную", ВТУ Генштаба ВС СССР, 1948.

Точность перевычисления с использованием всех таблиц составляет 2 см.

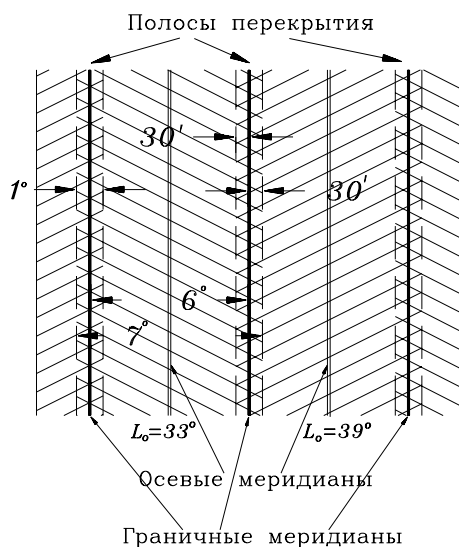


Рис.4.12

Для уменьшения числа возможных случаев перевычисления координат из одной зоны в другую на территории СНГ была установлена полоса перекрытия шириной в 1° по долготе, по $30'$ к западу и к востоку от граничного меридиана (рис.4.12.). Таким образом, каждая шестиградусная зона представляется по долготе семиградусной. Координаты пунктов, попавших в зону перекрытия вычисляются и записываются в каталогах в системах двух этих координатных зон. В связи с этим на топографических картах в пределах полосы перекрытия координатные сетки показываются относительно обеих зон.

4.13 Перевычисление плоских прямоугольных координат из одной системы в другую

В геодезической практике задача перевычисления координат пунктов из одной системы в другую возникает, большей частью, при привязке самостоятельных (местных) сетей к государственной геодезической сети или после новых работ по развитию сетей высших классов, приведших к изменению исходных данных в районе работ. Другими словами, задача перевычисления координат из одной системы в другую имеет место в следующих основных случаях:

- 1) сеть развивалась как самостоятельная в условной системе координат и необходимо получить координаты пунктов сети в общегосударственной системе;
- 2) сеть развивалась на основе определенного количества пунктов государственной сети более высокого класса. После работ по реконструкции сети исходные пункты получили новые координаты. Необходимо определить новые координаты созданной сети с учетом изменения координат исходных пунктов.

Переход к новой системе координат во всех случаях может быть выполнен путем переуравнивания сети с учетом новых исходных данных. Однако этот путь требует наличия данных непосредственных измерений, которые не всегда имеются.

Для перевычисления плоских прямоугольных координат из одной системы в другую необходимо иметь ряд пунктов, координаты которых известны в обеих системах. Такие пункты называются **общими** или **исходными**. Таких пунктов должно быть **не менее двух**. При наличии двух общих пунктов задача решается без контроля. Если общих пунктов более трех для решения используется принцип наименьших квадратов.

Перевычисление координат при наличии двух общих пунктов.

Пусть даны координаты n пунктов в старой системе координат:

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_i, y_i, \dots, x_n, y_n$$

и двух пунктов 1 и 2 в новой системе

$$x'_1, y'_1, x'_2, y'_2.$$

Требуется вычислить координаты остальных $(n-2)$ пунктов $(3, 4, 5, \dots, n)$ в новой системе.

По координатам пунктов 1 и 2 в старой и новой системах дважды решают обратную геодезическую задачу и вычисляют длины и дирекционные углы этой стороны.

Старая система	Новая система
$tg\alpha_{1-2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$tg\alpha'_{1-2} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$
$S_{1-2} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \alpha_{1-2}} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \alpha_{1-2}}$	$S'_{1-2} = \frac{y'_2 - y'_1}{\sin \alpha'_{1-2}} = \frac{x'_2 - x'_1}{\cos \alpha'_{1-2}}$

По этим данным вычисляют угол поворота координатных осей

$$\delta\alpha = \alpha' - \alpha \quad (4.66)$$

и масштабный множитель

$$m = 1 + \delta m, \quad \delta m = \frac{S' - S}{S}. \quad (4.67)$$

Для перевычисления координат используют известные формулы аналитической геометрии

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= x'_1 + (x_i - x_1)m \cos \delta\alpha - (y_i - y_1)m \sin \delta\alpha \\ y'_i &= y'_1 + (x_i - x_1)m \sin \delta\alpha - (y_i - y_1)m \cos \delta\alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.68)$$

Эти формулы позволяют вычислить в новой системе координаты любого пункта, используя пункт 1 в качестве исходного. Однако практически удобнее производить перевычисление, переходя в любой последовательности от пункта к пункту. Этому соответствуют формулы:

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= x'_{i-1} + (x_i - x_{i-1})m \cos \delta\alpha - (y_i - y_{i-1})m \sin \delta\alpha \\ y'_i &= y'_{i-1} + (x_i - x_{i-1})m \sin \delta\alpha - (y_i - y_{i-1})m \cos \delta\alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

Выбор последовательности перехода от пункта к пункту не имеет принципиального значения, но с целью увеличения точности необходимо стремиться, чтобы расстояние между пунктами было по возможности минимальным. Для контроля правильности перевычисления координат целесообразно заканчивать вычисления на втором исходном пункте.

Дирекционный угол и длину любой стороны сети в новой системе координат можно вычислить по формулам:

$$\alpha' = \alpha + \delta\alpha, \quad S' = S + S\delta m.$$

Кроме того, они могут быть найдены из решения обратных геодезических задач, что также является контролем вычислений.

При наличии только двух общих пунктов подобие сети при перевычислении сохраняется и лишь изменяется ее масштаб, если $m \neq 1$.

Перевычисление координат при наличии более двух исходных пунктов

В этом случае угол поворота $\delta\alpha$ и масштабный множитель m можно вычислить по любой паре общих пунктов. Естественно, что величины $\delta\alpha$ и m , вычисленные по разным парам общих пунктов, вследствие ошибок измерений в сетях будут иметь разные значения. Поэтому необходимо находить наиболее надежные значения $\delta\alpha$ и m .

Пусть имеется геодезическая сеть из n пунктов, заданных координатами в старой системе координат:

$$x_i, y_i \quad (i = 1, 2, \dots, r, r+1, \dots, n).$$

Кроме того, r пунктов ($r < n$) имеют координаты в новой системе:

$$x'_i, y'_i \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Обычно преобразование координат сводится к переносу начала координат старой системы на ξ и η , повороту ее на угол $\delta\alpha$ и изменению масштаба сети на величину $m \neq 1$.

Если эти параметры перевычисления известны, то новые координаты можно вычислить по формулам:

$$\begin{aligned} x_i'' &= \left\{ (x_i - x_0 - \xi) \cos \delta\alpha + (y_i - y_0 - \eta) \sin \delta\alpha \right\} m, \\ y_i'' &= \left\{ (y_i - y_0 - \xi) \cos \delta\alpha + (x_i - x_0 - \xi) \sin \delta\alpha \right\} m, \end{aligned} \quad (4.70)$$

где x_0, y_0 - координаты центра тяжести общих пунктов в старой системе координат.

$$x_0 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_i; \quad y_0 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y_i. \quad (4.71)$$

Очевидно, что путем тщательного подбора параметров $\xi, \eta, \delta\alpha$ и m можно добиться значительного уменьшения расхождений координат x_i' и x_i'' , а также y_i' и y_i'' . Однако полностью эти расхождения устранить невозможно.

Остаточные расхождения можно выразить формулами:

$$\begin{aligned} \Delta_{xi} &= (x_i' - x_0) - x_i'', & \Delta_{yi} &= (y_i' - y_0) - y_i'', \\ & (i = 1, 2, \dots, r). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Искомые параметры могут быть найдены по следующим формулам, которые получены при условии $\left[\Delta_{xi}^2 + \Delta_{yi}^2 \right] = \min$:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{\sum_{i=1}^r l_{xi}}{r}, & \eta &= -\frac{\sum_{i=1}^r l_{yi}}{r}, \\ \delta\alpha &= \frac{1}{\sum_{i=1}^r S_i^2} \sum_{i=1}^r (l_{xi} \sin \alpha_i - l_{yi} \cos \alpha_i) S_i, \\ \delta m &= \frac{1}{\sum_{i=1}^r S_i^2} \sum_{i=1}^r (l_{xi} \cos \alpha_i - l_{yi} \sin \alpha_i) S_i, \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

где

$$l_{xi} = x'_i - x_i, \quad l_{yi} = y'_i - y_i,$$

$$S_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2},$$

$$\cos \alpha_i = \frac{x_i - x_0}{S_i}, \quad \sin \alpha_i = \frac{y_i - y_0}{S_i}.$$

С помощью найденных параметров $\xi, \eta, \delta\alpha$ и δm можно вычислить новые координаты пунктов по формулам

$$\begin{aligned} x''_i &= \{(x_i - x_0 - \xi) + (y_i - y_0 - \eta)\delta\alpha\}(1 + \delta m); \\ y''_i &= \{(y_i - y_0 - \xi) + (x_i - x_0 - \eta)\delta\alpha\}(1 + \delta m). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Эти формулы получены из основных формул (4.70) с учетом того, что $m = 1 + \delta m$, $\cos \delta\alpha \approx 1$, $\sin \delta\alpha \approx \delta\alpha$ вследствие малости δm и $\delta\alpha$.

Средняя квадратическая ошибка перевычисления для общих пунктов будет равна

$$\mu = \sqrt{\frac{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}{2r - 4}} \quad (4.75)$$

Значения Δ_x и Δ_y вычисляются по формулам (4.72).

Средние квадратические ошибки параметров перевычисления будут равны:

$$m_\xi = m_\eta = \frac{\mu}{\sqrt{r}}, \quad (4.76)$$

$$m_{\delta\alpha} = m_{\delta m} = \frac{\mu}{\sqrt{[S^2]}}. \quad (4.77)$$

Существуют и другие способы перевычисления координат, с которыми можно ознакомиться в учебной и справочной литературе.

Список литературы

1. Закатов П.С. Курс высшей геодезии, М., Недра, 1976, 511 с.
2. Зданович В.Г. и др. Высшая геодезия, М., Недра, 1970, 512 с.
3. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии, М., Недра, 1979, 296 с.
4. Хаимов З.С. Основы высшей геодезии. М., Недра, 1984, 360 с.
5. Яковлев Н.В. и др. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы), М., Недра, 1982, 368 с.